ベイズ「偶然論における一問題の解法」（２）

林　直樹

Ⅲ　ベイズ「偶然論における一問題の解法」（後編）

凡例

①以下は，トマス・ベイズ著 *An Essay towards solving a Problem in the Doctrine of Chances*（1763 年）のうち，著者ベイズによる本論（前編と題して林 2021 で訳出）に続けて編者プライスが加筆した本文部分，およびそれにプライスが付した原注の全訳である。ただし，そのままでは難解な本文の精確な理解に資するため，プライスがベイズの草稿を利用しつつ自ら解説を施した *A Demonstration of the Second Rule in the Essay towards the Solution of a Problem in the Doctrine of Chances*（1764 年）を副読本として添えている。訳注をご覧いただきたい。

②底本には，英国王立協会の公式ウェブサイト（https://royalsociety.org）から入手可能な『王立協会紀要』*Philosophical Transactions* の電子版資料所収の原典，すなわち Bayes 1764b を用いた。必要に応じて Barnard 1958 と Dale 2003 さらには Price 1983 に再録された原文を，また訳出に当たっては，抄訳に相当する安藤 1976 も参照した。Bayes 1764a および Price 1765 についても同様の経路で入手可能である。

③原注はローマ数字の小文字で，訳注はアラビア数字で示した。

④訳文中の括弧は次の四種類に分かれる。〔　〕は原語を添える場合に用いる。〈　〉は囲んだ訳語の原語がイタリック体であることを示す。［　］は短い訳注である。（　）は原典で用いられている箇所にそのまま用いている。ただし数式の括線については（　）で代替した。林 2021 の訳注６もご確認いただきたい。

［前編よりつづく］

ここで与えられた規則について，さらに分かることは，ｐとｑの両方が非常に大きな数である場合に，そうした級数〔serieses〕が含み持つ数多の項に対してこの規則を適用することは出来かねることである。そこでベイズ氏は，この場で示すにはあまりに面倒な検討を通じて，先の規則から，以下のような別の規則を導き出したのであった。

規則２[1)]

ある出来事について，ｐ＋ｑ回あるいはｎ回の試行においてｐ回発生しｑ回失敗したということ以外，何も分かっておらず，このことから私が，たった一度の試行においてこの出来事が起こる確率は$\frac{p}{N}+z$と$\frac{p}{N}-z$の間にあると推測するとしよう。$m^2=\frac{n^3}{pq}$[2)]，$a=\frac{p}{n}$, $b=\frac{q}{n}$,（ａ＋ｂ）ⁿが展開された際に$a^p b^q$が現れる項の係数をＥとし，$\Sigma=\frac{n+1}{n}\times\frac{\sqrt{2pq}}{\sqrt{n}}\times E a^p b^q \times^{d}$こと級数$mz-\frac{m^3z^3}{3}+\frac{n-2}{2n}\times\frac{m^5z^5}{5}-\frac{(n-2)\times(n-4)}{2n\times 3n}\times\frac{m^7z^7}{7}+\frac{n-2}{2n}\times\frac{n-4}{3n}\times\frac{n-6}{4n}\times$

$\frac{m^9z^9}{9}\cdots$とすれば，私が正しい偶然は$\frac{2\Sigma}{1+2Ea^pb^q+\frac{2Ea^pb^q}{n}}$よりも大きく$\frac{2\Sigma}{1-2Ea^pb^q-\frac{2Ea^pb^q}{n}}$よりも小さい[i]。ｐ＝ｑならば，その偶然はちょうど２Σである。

ｉ）ベイズ氏の原稿では，この偶然は$\frac{2\Sigma}{1+2Ea^pb^q}$より大きく$\frac{2\Sigma}{1-2Ea^pb^q}$より小さいとされている。私が与えたような二つの除数中の第三項は省略されている。だがこのことは，ベイズ氏自身がすでに見出していたはずだと私には十分に思われる当該規則を導き出すに当たっての，小さな見落としによるものに違いないので，私はあえて彼の草案を訂正し，そうあるべきだと納得のいくかたちで規則を与えることにしたのである。

この規則をあらゆる場合につき適用可能にするためには，十分な近似としてEa^pb^qの値ならびに級数$mz-\frac{m^3z^3}{3}\cdots$の値を見出す方法を知ることだけが必要である[ii]。この前者についてはベイズ氏が証明したように，四分円弧が半径に対して持つ比率〔ratio〕をＫとすると，Ea^pb^qは$\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{Kpq}}$に〈双曲〉対数が$\frac{1}{12}\times\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)-\frac{1}{360}\times\left(\frac{1}{n^3}-\frac{1}{p^3}[-]\frac{1}{q^3}\right)+\frac{1}{1260}\times\left(\frac{1}{n^5}-\frac{1}{p^5}-\frac{1}{q^5}\right)-\frac{1}{1680}\times\left(\frac{1}{n^7}-\frac{1}{p^7}-\frac{1}{q^7}\right)+\frac{1}{1188}\times\left(\frac{1}{n^9}-\frac{1}{p^9}-\frac{1}{q^9}\right)\cdots$である〈比率〉を掛け合わせたものに等しくなるだろうし[3]，ここに数字で表された係数は次の通りの方法で求まる。それらの係数をＡ，Ｂ，Ｃ，Ｄ，Ｅなどと呼ぶ。続いて$A=\frac{1}{2.2.3}=\frac{1}{3.4}$，$B=\frac{1}{2.4.5}-\frac{A}{3}$，$C=\frac{1}{2.6.7}-\frac{10B+A}{5}$，$D=\frac{1}{2.8.9}-\frac{35C+21B+A}{7}$，$E=\frac{1}{2.10.11}-\frac{126C+84D+36B+A}{9}$，$F=\frac{1}{2.12.13}-\frac{462D+330C+165E+55B+A}{11}$，等々となるが，Ｄ，Ｅ，Ｆなどの値に含まれるＢ，Ｃ，Ｄ，Ｅ，Ｆなどに付された係数は，展開された$(a+b)^7$，$(a+b)^9$，$(a+b)^{11}$等に含まれる最大の係数の二つ分，三つ分，四つ分等々である。［Ｄ，Ｅ，Ｆなどと呼ぶ］各個の値の中で，これらの係数のうち最小のものがＢに付与され，二番目に小さなものはＢから最も離れた文字に，その次に小さなものはＣに，その次に小さなものは先の一つを除きＢから最も離れた文字に，その次に小さなものはＤに，その次に小さなものは先の二つを除きＢから最も離れた文字に，などといったように付与される[iii]。

ⅱ）この級数のごくわずかな項でも，双曲対数に対して十分な程度の正確さを一般的には与えるだろう。同様の級数はド・モアブル氏やシンプスン氏ら著名な数学者たちによって，１，２，３，４，５からｘまでの数の対数の総和を示す式の中で与えられたことがあり，彼らはその総和が$\frac{1}{2}\log.c+\left(x+\frac{1}{2}\right)\times\log.x-x+\frac{1}{12x}-\frac{1}{360x^3}+\frac{1}{1260x^5}\cdots$に等しくなると主張した。ｃは半径１の円の周長を指している。だがベイズ氏は，本巻［『王立協会紀要』第 53 巻］に収録された先行論文において，最初の項のいくつかを取り上げるだけで上式は当該総和の値のごく近傍に接近するだろうけれども，級数全体としてはどのような数量も表すことができないと証明した。なぜなら，ｘを任意に採るとすれば，級数の一部は必ずや発散〔diverge〕を始めるだろうからである[4]。この考察が当該級数の有用さに対して大きな影響を及ぼすことはないとはいえ，数学者たちに注意を払われて然るべきものではあろう。

ⅲ）これらの係数を見出す，この方法を，私はシンプスン氏の『偶然の性質と法則』論の末尾にある補題３の証明から導き出した[5]。

級数$mz-\frac{m^3z^3}{3}+\frac{n-2}{2n}\times\frac{m^5z^5}{5}\cdots$の値に関して，彼はそれが，ｍｚが１未満のとき，それどころか$\sqrt{\ }$３を超えないときでも，直接に計算可能であると考えた。しかしｍｚがさらに大きいときには計算が事実上不可能になる。このような場合に際して彼は，この級数の真値がその間に存在するに違いない，非常に近似した二つの値を，容易に見出す方法を示している。

この目的のために彼が与えた定理は以下の通りである。

先述のように，Ｋは四分円弧の半径に対する比率を表し，Ｈが表す比率は，その双曲対数が$\frac{2^2-1}{2n}-\frac{2^4-1}{360n^3}+\frac{2^6-1}{1260n^5}-\frac{2^8-1}{1680n^7}\cdots$になるとしよう。さらに，級数$mz-\frac{m^3z^3}{3}\cdots$は，その項が何番目まで続こうと，最後の項の前に正の符号があるか負の符号があるかに応じて，

級数$\frac{Hn}{n+1}\times\frac{\sqrt{K}}{\sqrt{2}}-\frac{n}{n+2}\times\frac{\left(1-\frac{2m^2z^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}+1}}{2mz}+\frac{n^2}{n+2}\times\frac{\left(1-\frac{2m^2z^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}+2}}{(n+4)\times 4m^3z^3}+\frac{3n^3}{n+2}\times\frac{\left(1-\frac{2m^2z^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}+3}}{(n+4)\times(n+6)\times 8m^5z^5}+\frac{3\times 5\times n^4}{n+2}\times\frac{\left(1-\frac{2m^2z^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}+4}}{(n+4)\times(n+6)\times(n+8)\times 16z^7m^7}-\cdots$よりも大きいか小さいかであろう[6]。

これらEa^pb^qと$mz-\frac{m^3z^3}{3}+\frac{n-2}{2n}\times\frac{m^5z^5}{5}\cdots$の値を規則２に代入することで規則３が生じるが，それはｍｚがかなり大きな量である場合に用いられる規則である。

規則３[7]

ある出来事について，ｐ＋ｑ回ないしｎ回の試行においてｐ回発生しｑ回失敗したこと以外，何も知られておらず，このことから私が，たった一度の試行においてその出来事が発生する確率は$\frac{p}{N}+z$と$\frac{p}{N}-z$の間にあると判断する場合，私が正しい偶然は$\frac{\sqrt{Kpq}\times h}{2\sqrt{Kpq}+hn^{\frac{1}{2}}+hn^{-\frac{1}{2}}}\times\left\{2H-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{K}}\times\frac{n+1}{n+2}\times\frac{1}{mz}\times\left(1-\frac{2m^2z^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}+1}\right\}$よりも大きく，$\frac{\sqrt{Kpq}\times h}{2\sqrt{Kpq}-hn^{\frac{1}{2}}-hn^{-\frac{1}{2}}}$に三項，すなわち$2H-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{K}}\times\frac{n+1}{n+2}\times\frac{1}{mz}\times\left(1-\frac{2m^2z^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}+1}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{K}}\times\frac{n}{n+2}\times\frac{n+1}{n+4}\times\frac{1}{2m^3z^3}\times\left(1-\frac{2m^2z^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}+2}$を掛け合わせたものよりも小さい。ここで$m^2$，Ｋ，ｈおよびＨはすでに説明された数量を表している。

補遺
いくつかの特殊な場合への先述の諸規則の適用を含む

規則１はあらゆる場合について直接的かつ完全な解法を与える。その後の二つの規則は規則１を適用しようとする労が過多となる場合の，規則１で与えられた解法への特殊な近似法に過ぎない。

規則１は，ｐもしくはｑが０か，大きくない場合にはつねに用いることができる。規則２は，ｍｚが√３未満の場合にはつねに用いることができる。規則３は，ｎが偶数かつ非常に大きいとしたとき，m^2z^2が１よりも大きく$\frac{n}{2}$よりも小さい場合にはつねに用いることができる。ｎが大きくないとこの最後の規則はそれほど望ましいものとはなり得ない。それは，ｎが減少するに応じてｍ［$=\frac{n\sqrt{n}}{\sqrt{2pq}}$］も減り続けるため，この場合にはｚに大きな値が取られることになるだろうが，（したがって$\frac{p}{N}-z$と$\frac{p}{N}+z$の間に相当な隔たりを設けることになるが,）にもかかわらず規則２に従った演算が実行されるからである。そうしなければｍｚは√３を超えないだろうからだ。

とはいえ，当該問題の性質，ならびにベイズ氏が当該問題の解法をどこまで推し進めたかを明確かつ十全に示すため，私は，この解法による結果をいくつかの場合において与えておこうと思う。まずは最も基底的かつ単純な場合から始める。

［ベイズ氏の］論考の中でＭと呼ばれるような出来事，すなわち試行に先立って私たちはその確率について何も知らない出来事が〈一回〉発生したとして，このことから私たちは,〈二回目の〉試行に際し，この出来事が起こる確率に関してどのような結論を引き出すことができるか。それが問われていると，最初に仮定しておこう。

問いの答えは，この出来事が二回目の試行に際して五分五分の偶然〔even chance〕をいくらか上回って起こる見込み〔odds〕は３対１だけ存在するというものである。

なぜなら，この場合と，ｑが０となるその他すべての場合とにおいて，規則１の考察から分かるように（ｎ＋１）×（$\frac{X^{p+1}}{p+1}-\frac{x^{p+1}}{p+1}$）すなわち$X^{p+1}-x^{p+1}$の式が解を与えるからである[8)]。したがって，この式における（ｐ＋１）＝２，Ｘ＝１およびｘ＝$\frac{1}{2}$とすれば，$1-\left(\frac{1}{2}\right)^2$すなわち$\frac{3}{4}$となるだろう。それは，一回起きたことのある出来事の確率が１と$\frac{1}{2}$の間のどこかに存在することの偶然を示す。あるいは,（同じことだが）この出来事が二回目の試行に際して起こる偶然は五分五分をいくらか上回る見込みであることを示す[ⅳ)]。

ⅳ）当設問において，１〔unity〕がつねに確実性を表し，$\frac{1}{2}$がつねに五分五分の偶然を表すと想定することに理由など要らないと，私は考える。

同様に，当該出来事が二度起きたとしたら，いま言及した見込みは７対１になり，三度起きたとしたら１５対１になるだろう。一般化すれば，当該出来事がｐ回起きたならば，その後の試行に際してこの出来事が五分五分の偶然〔equal chance〕よりも〈多く〉起こる見込みは$2^{p+1}-1$対１だけ存在するだろう[9)]。

さて，ある出来事について私が知っていることのすべてが，その出来事が１０回連続で起きたということだけだと仮定しよう。このとき，ただ一度の試行におけるこの出来事の発生確率が$\frac{16}{17}$と$\frac{2}{3}$の間のどこかに存在すると推測する，すなわち，この出来事が発生する原因の失敗する原因に対する比率が１６対１と２対１の間の何らかの比率であると推測するとき，私たちはどのような根拠で自分たちは正しいと考えてよいのかが，問われるべきである。

ここでｐ＋１＝１１，$X=\frac{16}{17}$，$x=\frac{2}{3}$とすれば，$X^{p+1}-x^{p+1}=\left(\frac{16}{17}\right)^{11}-\left(\frac{2}{3}\right)^{11}$＝．５０１３…［精確には０．５０１７５…］になる。それゆえ，私たちが正しいのはほぼ五分五分の偶然によるというのが答えである。

同様にして，いかなる場合においても，反対の経験によって打ち消されない一定数の経験から私たちがどのような結論を引き出すべきかについて，決定することができる。所与の条件下で，ある出来事が失敗することなく起きた回数がより多いか少ないかに応じて，より多いかあるいは少ない信念〈confidence〉を抱きながらその出来事を期待する根拠は存在すると，すべての人が一般的には見なしている。しかしここで私たちは，その根拠がどのようなものであるか，その根拠の土台にはいかなる原理があるか，そして私たちは自分たちの期待をどのように規則付ければよいかを，正確に見つめていることになる。

だが，この主題についてはさらに長く論じるほうがよいだろう。

面の数も構造も不明な立体ないしサイコロがあるとして，それを投げて得られる経験から私たちは面数と構造を判定すると仮定しよう。

この場合，当該立体が，前もって指定されていたどれか一つの面を初回の試行において出すことは，最高度にありそうもないと見なせるはずである。というのは，立体は複数の面を出すに違いないし，別の面，つまり上記が指定されていなければ選び出されていたはずの面も無数に存在し，それらは等しく表出しそうだと分かるからである。第一投が示すのは，ただ，投げられた時にその面が〈出ている〉ということだけで，数ある投擲中の他の回ではなくその回に，その面が出ると考える根拠など何もない。したがって私たちは，第一投の前ではなく〈後〉に，目下の問題の諸条件が要求する状況に置かれることになると考えられよう。この投擲の結果こそが私たちをその状況へと導くことになるからである。つまりは，後続するいずれか一回の試行において初めての面を振り出すことは，それがどの程度起こりそうか，または起こりそうにないかについて判断できず，せいぜい無と確実の間のどこかにその確率は存在するとしか分からないような出来事でしかない。私たちの計算は二度目の試行とともに始まらねばならない，ということである。二度目の試行において，この仮想立体が再び同一の面を出すとした場合，この種の面が他の面以上に多く出ることにつき，あるいは（同じことになるが）その構造上，当該面を最も頻繁に出す何らかの傾向があることにつき，３対１の確率が生じる。すでに説明した仕方で，当該面が途切れることなく振り出される回数とともに，この確率は上昇するだろう。しかしながら，そうした経験の回数がいくつになろうとも，当該面以外の面が〈決して〉出ないと考える十分な根拠を与えることはできないと，想定されねばならない。例えば１００万の試行の全回で同一面が出たとしよう。こうした状況では，当該面がその他の面より多く出る回数が１４０万を〈下回る〉ことは起こりそうにないが，１６０万を〈上回る〉多さになることも起こりそうにないだろう。後者の偶然は$\frac{1600000}{1600001}$を１００万乗して１から減ずることで表され，それは．４６４７…に等しくなる。前者の偶然は$\frac{1400000}{1400001}$に等しく，これを同じく１００万乗すると．４８９５…となる。どちらも五分五分の偶然を下回るため，私がいま述べたことを証明している[10]。だが，こうして，当該面が他の面よりも多く出る回数が１６０万を〈上回る〉ことも１４０万を〈下回る〉ことも起こりそうにないとはいえ，そのことは決して，この場合における真実の比〔proportion〕が１６０万対１の比と１４０万対１の比の間のどこかに存在すると判断する上での根拠を与えはしない。なぜなら，労苦を惜しまず計算した人なら分かるだろうように，その比が６０万対１の比と３００万対１の比の間のどこかに存在する確率は約．５２７で表され[11]，五分五分の偶然と大差ないからである。この［真実の］比が９０万対１の比と１９０万対１の比の間のどこかに存在す

るとしたほうが，９０万が１９０万に対するのと同様に互いを前項とし，後項を１とする他の二つの比の間以上の見込みがありそうだと付言しておいてもよい。

私はこれらの考察を，それらがすべて自然界の出来事と現象に対して厳密に適用可能であることを主たる理由として，行った。何らかの自然的対象の一つを別の対象に適用すれば何らかの特定の出来事が生じると，あらゆる経験に先立ってあらかじめ想定されることなど，万に一つもあり得そうにない。その他の無数の出来事の一つひとつが，五分と五分の偶然のもとに存在しているからである。だが，木を火中に投じて燃やすとか，石を隣接物から引き離して落とすとかといった，何らかの特定の［出来事の］結果を一度でも目にすると，後続して何度か生じる同種の出来事から引き出される結論は，たった今，私が仮想立体の構造に関連付けて述べた結論と同様の仕方で決定付けられることになる。換言すれば次の通りである。何らかの自然的対象について全く初めてなされたと仮定される経験は，それらの対象の特定の状態変化を受けて生じる出来事について，私たちに知らせるだけであろう。それは自然の斉一性〔uniformity〕に関する観念を何も私たちに示唆しないだろうし，この事例において，あるいはその他の事例において，当該出来事が不規則的ではなく規則的に作用すると捉える上での根拠を，何一つ与えないだろう。だが，後続する一度あるいはそれ以上の数の経験において間断なく同一の出来事が生じ続けたとした場合，何らかの程度の斉一性が観測されることになる。理性は，さらなる経験においても同様のことが続くと期待させられるだろうし，目下の問題の解法が指示する通りの計算が行われることにもなるだろう。

ここで一例を示しても差し支えはないと思われる。

この世に生まれてきたばかりで，出来事の順序や流れについての自らの観測を通じて，この世にはどのような力が働いており，またどのような原因が作用しているのかについて情報を収集していかねばならない，一人の人物の場合を想い浮かべてみてほしい。おそらくは太陽が彼の注意を引く最初の対象であろう。だが，最初の夜に姿を消した太陽を再び目にすることになるのかどうか，彼には全く分からない。それゆえ彼は，全く未知の出来事を初めて経験する人物の状態にある。しかし，太陽の二度目の出現，ないしは一度目の〈回帰〉を彼が目にし，二度目の回帰についての期待が上昇したとすれば，彼は，この出来事の〈いくらかの〉確率について３対１の見込みがあると知ることになるだろう。すでに示したように，彼が目撃する回帰の度数とともにこの見込みも上昇していく。ただし，絶対的ないし物理的〔physical〕な確実性を生み出すには，有限の回帰数では決して十分ではない。太陽が１００万回，規則的に，かつ決まった時間間隔で回帰するのを彼が見てきたと仮定しよう。このことは次の結論を保証する。すなわち，２の１００万乗対１の見込みで，太陽は通常の時間間隔の後に再び回帰しそうだということである。これについての見込みは．５３５２で表される確率で１６０万対１を〈超え〉ない。また．５１０５で表される確率で１４０万対１を〈下回る〉ことはない[12]。

これらの導出は，自然に関する事前の〔previous〕完全な無知を仮定していることが，注意深く想い起こされねばならない。出来事の流れを一定期間観測した後では，自然の作用は一般的に見て規則的であり，自然に満ちている力や法則は安定的かつ永続的であることが，知られるであろう。このような考察は，一度や数度の経験を通じて，そのような経験をしない場合に根拠付けられる以上のいっそう強固な成功の期待を，しばしば，さらなる経験についてもたらすことになるだろう。ある種の事物の数々が，ある場所で一緒に配置されているのを頻繁に観測すると，特定の種類の事物がその場に存在することを発見したとき，同種の事物のその他多数も当該事物とともにその場に蓄えられていると，私たちが結論付けようとするのと，ちょうど同じようなものである。先の導出と矛盾するべくもないこれこそが，先の導出が適用されるべき唯一特定の事例であることは明白である。

〈斉一な〉経験から私たちがいかなる結論を引き出すべきかについては，すでに述べた事柄が十分に指し示していると思われる。それはとりわけ，出来事が〈つねに〉斉一な経験に適うかたちで起こるだろうことを示す代わりに，そうした帰結に反する根拠がつねに存在することを証明している。言い換えれば，自然の流れが最も恒常的なところでは，その恒常性の度合に見合った出来事の再現性を見積もる根拠だけを，私たちは有するはずである。しかしながら，この恒常性の元となる原因の作用に干渉する自然界の原因が〈絶えて〉何も存在しない，すなわち，この恒常性を起こらなくさせる世の事情など何一つないと考える根拠を，私たちは持つことができない。このことが真実だとすれば，経験から引き出された〈データ〉を想起するだけで，私たちは，他の原理を応用する場合や，経験とは独立した根拠が示唆可能な考察を頼りとする場合に，上記のように考える追加的根拠を見出すことになるだろう[13]。

この場で意図していたことを越えたところまで進んでしまったようである。当該主題の別の方面に，私たちの思考を振り向ける時が来たようだ。すなわち，経験が何度か成功し何度か失敗した場合について考える時が来た，という意味である。

さて，今回もなるべく平明かつ明確にするために，私が思いつくかぎりで最も簡明かつ単純な，次の場合を設定するのが適切だろう。

富くじの抽選に参加している，ある人物のことを想像するとしよう。この人は，くじの仕組みについても〈外れくじ〉の〈当たりくじ〉に対する比率についても何も知らないとする。さらには，彼はこの比を，引かれたと彼が耳にした〈外れくじ〉の数を〈当たりくじ〉の数と比較することで推理せねばならないと仮定する。こうした状況のもとで彼はどのような結論を合理的に下すことができるかを，考究するとしよう。

まず,〈１０本〉の外れくじが引かれたのに対して〈１本〉の当たりくじがあったと彼が耳にしたとして，その際に彼が，この富くじにおける〈外れくじ〉の〈当たりくじ〉に対する比は９対１と１１対１の間のどこかにあると推測する場合に，彼が正しいと言える偶然はどのくらいになるかを検討してみよう。

ここでＸ＝$\frac{11}{12}$, ｘ＝$\frac{9}{10}$, ｐ＝１０，ｑ＝１，ｎ＝１１，Ｅ＝１１と置くと，規則１に従って，求められるべき偶然は（ｎ＋１）×Ｅに（$\frac{X^{p+1}}{p+1}-q\frac{X^{p+2}}{p+2}$）と（$\frac{x^{p+1}}{p+1}-q\frac{x^{p+2}}{p+2}$）との差を掛け合わせて，１２×１１×［{］（$\frac{\left(\frac{11}{12}\right)^{11}}{11}-\frac{\left(\frac{11}{12}\right)^{12}}{12}$）－（$\frac{\left(\frac{9}{10}\right)^{11}}{11}-\frac{\left(\frac{9}{10}\right)^{12}}{12}$）［}］＝．０７６９９…である。したがって，彼が正しいと言え〈ない〉見込みは約９２３対７６，ほぼ１２対１となる。彼が大まかに，９本の外れくじに対して当たりくじは１本を下回るとだけ推測していたとしたら，彼が正しい確率は．６５８９，見込みは６５対３４に等しくなっていただろう[14]。

さて，２０本の〈外れくじ〉が引かれたのに対して２本の〈当たりくじ〉があったと彼が耳にしたとしよう。彼が同様の推測を行う場合，彼が正しいと言える偶然はどのくらいだろうか。

ここでＸとｘは引き続き同じであるとして，ｎ＝２２，ｐ＝２０，ｑ＝２，Ｅ＝［$\binom{22}{2}$＝］２３１とすると，求められるべき偶然は（ｎ＋１）×Ｅ×{（$\frac{X^{p+1}}{p+1}-q\frac{X^{p+2}}{p+2}+q\times\frac{q-1}{2}\times\frac{X^{p+3}}{p+3}$）－（$\frac{x^{p+1}}{p+1}-q\frac{x^{p+2}}{p+2}+q\times\frac{q-1}{2}\times\frac{x^{p+3}}{p+3}$）}＝．１０８４３…である。

したがって彼が正しい偶然は先の例よりも改善し，彼が正しくない見込みは今や８９２対１，およそ９対１となるだろう。だが前と同様に９本の外れくじに対して当たりくじは１本を下回るとだけ，彼が大まかに推測するとしたら，彼が正しい偶然はこれより悪化するだろう。なぜなら．６５８９すなわち約２対１の見込みとなる代わりに，その偶然は．５８４ないしは５８４対４１５の見込みとなるだろうからである[15]。

さらには，４０本の〈外れくじ〉が引かれたのに対して〈当たりくじ〉は４本だったと彼が聞いたとした場合，上述の偶然はどうなるだろうか。

その答えは，前者の偶然が．１５２５で後者の偶然が．５２７だというものである。したがって，外れくじの当たりくじに対する比が９対１と１１対１の間に存在しない見込みは今や５$\frac{1}{2}$対１に過ぎなくなり，［外れくじを引く見込みが］９対１を下回る偶然は五分と五分の偶然と大差ないものになるだろう[16]。

もう一例だけ続けよう。１００本の外れくじが引かれたのに対して当たりくじは１０本だと聞いた場合である。

その場合の答えも規則１を通じて見出すことができる。外れくじの当たりくじに対する比が９対１を〈下回る〉偶然は．４４１０９となるだろうし，１１対１を〈上回る〉偶然は．３０８２となるだろう。したがって当たりくじに対する外れくじが９本を〈下回ら〉ず１１本を〈上回ら〉ないこともありそうであろう。だが同時に，真実の比は，９対１と１１対１の間に存在しそうにない[v]ままであろう。その［真実の比がその間に存在する］偶然は．２５０６…である。それゆえ，この偶然に反するおよそ３対１の見込みは依然として存在するだろう[17]。

ｖ）注意深い人であればこの点の理解に苦しむことはないと思う。無と確実の間の隔たりが１００個の均等な偶然に分割されるとすれば，うち４４個は外れくじの当たりくじに対する比が９対１を下回るもの，３１個は１１対１を上回るもの，そして２５個は９対１と１１対１の間の何らかの比となるだろう，と述べているだけである[18]。その場合に，これらの仮設物［１００個の均等な偶然を上記三組に分けたもの］のどれか一つが真実には違いないにせよ，それらの各々に反する偶然のほうが準ずる偶然よりも大きければ，そのどれもが，単独では真実であり得そうにないことは明らかである。

これらの計算から，私が仮定する状況において，〈外れくじ〉の〈当たりくじ〉に対する比を所与の回数引かれた〈外れくじ〉の本数の当たりくじの本数に対する比とほぼ同一とする推測が正しいものである偶然は，それらの本数が増大にするにつれて継続的に増大するように思われる。したがって本数が非常に大きい場合には，この結論は事実上〔morally〕確かなものであると見なしてよいだろう。類推により，非常に多数回の経験がなされた出来事の各々については，その発生諸原因が失敗諸原因に対して持つ比は発生回数が失敗回数に対して持つ比と同等になることが，一般的に導かれる。さらに言えば，原因が既知だと仮定されたある出来事が，この結論に適う頻度よりも多くまたは少なく発生する場合，既知の原因の作用を攪乱する何らかの未知の原因が存在すると信じるに足る根拠があることになろう。ゆえに，特に自然界の出来事の流れについては，それらが，私たちが観測する出来事の順序を生み出すために自然の構造の内部に原初的に打ち立てられた永続的原因もしくは法則から引き出されていると証明するに足る，はっきりした証拠が存在するように思われる[vi]。このことは，私が述べてきた事例がそうであるように，１００万回の試行において〈外れくじ〉を〈当たりくじ〉よりも１０倍多く引く理由は抽籤器〔wheel〕の中に〈外れくじ〉が〈当たりくじ〉よりもかなり多く存在することだということと，全く同様に明白である。

vi）ド・モアブル氏の『偶然論』250 頁を見よ[19]。

とはいえ，以上の点の証明をもう少し先まで進めよう。

富くじの仕組みについて全く無知な，ある人物が，１００本の〈外れくじ〉と１０本の当たりくじが引かれたと耳にすると，この富くじにおける〈外れくじ〉の〈当たりくじ〉に対する比は９対１と１１対１の間のどこかにあり，彼が正しい偶然は．２５０６…だろうとする推論へと導かれるはずだという点を[20]，私たちはすでに見た。ここでは，さらに高次の場合にこの偶然がどうなるかを考察しよう。

１１００回の試行で〈外れくじ〉が１０００回，当たりくじが１００回引かれると仮定しよう。

この場合にＸとｘの冪乗は高次に上り，二つの級数$\frac{X^{p+1}}{p+1}-\frac{qX^{p+2}}{p+2}\cdots$と$\frac{x^{p+1}}{p+1}-\frac{qx^{p+2}}{p+2}\cdots$における諸項の数は非常に多くなるため，規則１に従って答えを得ようとすると莫大な労力が求められる。したがって規則２に頼ることが必要になる。だが規則２を用いるためにはＸとｘの間の隔たりを少し改変せねばならない。$\frac{10}{11}-\frac{9}{10}$は$\frac{1}{110}$だから，$\frac{10}{11}-\frac{1}{110}$と$\frac{10}{11}+\frac{1}{110}$の間の隔たりは$\frac{9}{10}$と$\frac{11}{12}$の間の隔たりとほぼ同じであり，多少大きいに過ぎないだろう。次に私たちが問いを，(１１００回の試行において外れくじが１０００回，当たりくじが１００回引かれたこと以外を知らないとして)ただ一度の試行で外れくじを引く確率が$\frac{10}{11}-\frac{1}{110}$と$\frac{10}{11}$＋$\frac{1}{110}$の間のどこかに存在する偶然はどのくらいあるか，というものに改めるならば，先の問いの数々と同種の問いを得ることができるだろうし，それらの問いの中で与えられていた範囲を，わずかに逸脱するだけで済む。

規則２による答えは，この偶然が$\frac{2\Sigma}{1-2Ea^pb^q+\frac{2Ea^pb^q}{n}}$を上回り[21]，$\frac{2\Sigma}{1-2Ea^pb^q-\frac{2Ea^pb^q}{n}}$を下回り，そしてＥ[22]は$\frac{n+1}{n}\times\frac{\sqrt{2pq}}{\sqrt{n}}\times$Ｅａ^{p}ｂ^{q}×［(］ｍｚ－$\frac{m^3z^3}{3}+\frac{n-2}{2n}\times\frac{m^5z^5}{5}\cdots$［)］］になるというものである。

ここで１０００＝ｐ，１００＝ｑ，１１００＝ｎ，$\frac{1}{110}$＝ｚ，ｍ＝$\frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{pq}}$＝１．０４８８０８[23]，Ｅａ^{p}ｂ^{q}＝$\frac{h}{2}\times\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{Kpq}}$，ｈは比率で，その双曲対数は$\frac{1}{12}\times\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)-\frac{1}{360}\times\left(\frac{1}{n^3}-\frac{1}{p^3}-\frac{1}{q^3}\right)+\frac{1}{1260}\times\left(\frac{1}{n^5}-\frac{1}{p^5}-\frac{1}{q^5}\right)\cdots$となり，Ｋは四分円弧が半径に対して持つ比率である。以上の式の前者は．７９５３…と分かり，後者は．９４０５…と分かる。したがって考究されるべき偶然は．７９５３より大きく．９４０５より小さい[24]。つまり，外れくじの当たりくじに対する比が〈ほぼ〉９対１と１１対１（〈正確には〉９対１と１１１１対９９）の間に存在するという推測が正しい見込みは４対１より大きく，１６対１より小さいだろう。

では，１万１０００回の試行において〈外れくじ〉が１万回，〈当たりくじ〉が１０００回引かれたということ以外知られていないと仮定したとき，ここで言及した偶然はいくらになるだろうか。

ここでは規則１と同様に規則２も役に立たなくなる。ｍｚの値が非常に大きいため，ｍｚ$-\frac{m^3z^3}{3}+\frac{n-2}{2n}\times\frac{m^5z}{5}$［正しくは$\frac{m^5z^5}{5}$］－…の級数を直接に計算することはまず不可能だからである。それゆえ規則３が用いられねばならない。規則３が私たちにもたらす情報は，求められるべき偶然は．９７４２１より大きい，すなわち４０対１の見込みを上回る，というものである。

これらと同様の計算を通じて，どのような期待が経験によって保証されるのかを，それらの経験が成功し失敗する様々な回数に応じて，一般的に決定することができるだろう。あるいは，自然界において私たちが出会う個々の原因が，ただ一度の試行で，それと結合した結果を生み出すか生み出さないかをめぐる確率について，どのように考えられるべきかを，一般的に決定することができるだろう。

おそらくは大半の人々が，私が与えた標本における偶然を，私が見出したものよりも大きいと期待していたのではないだろうか。だがこのことは，計算は別として，私たちがこの主題について判断を下す際にいかに誤りやすいかを示すのみである。しかしここで，ある事柄が想い起こされねばならない。それは$\frac{9}{10}$と$\frac{11}{12}$の間の，すなわち$\frac{10}{11}+\frac{1}{110}$と$\frac{10}{11}-\frac{1}{110}$の間の隔たりの狭小さである。この間隔をもう少し大きく取っていれば，計算結果に大きな違いが生じていただろう。よって，この間隔を倍に取ってｚ＝$\frac{1}{55}$にしていれば，第四の例において，一度の試行で外れくじを引く確率が$\frac{10}{11}+\frac{1}{55}$と$\frac{10}{11}-\frac{1}{55}$の間にあるとする判断が正しい見込みが，誤っている見込みと入れ替わりに存在すると判明していたはずである。

先述の計算はさらに，この論文で打ち立てられた諸規則の有用性と欠点を私たちに示している。後ろ二つの規則が，要求されている偶然を，期待されているほどの狭い範囲において私たちに与えなどしないことは明白である。だがここで再び考慮されるべきなのは，ｑをｐに照らして大きく取れば取るほど，それだけこの範囲が狭まることである。ｐとｑが等しいとしたら，規則２を用いることであらゆる場合について厳密な解が与えられる。したがって，これら二つの規則が私たちの判断に与える指示は，規則１における二つの級数の値に関するより優れた近似を誰かが発見するまでは，非常に大きな有用性を帯びることだろう[vii)]。

vii）こう書いたのち私は$\frac{2\Sigma}{1+2Ea^pb^q+\frac{2Ea^pb^q}{n}}$の式が，求められている真値に，それよりつねに幾分か小さいということ以外は期待できる限度まで接近することを証明することで，規則２と規則３における近似を大幅に改善する方法を見つけ出した。それをこの場でほのめかしておくことは，証明を与えられないにせよ必要なことだろう[25)]。

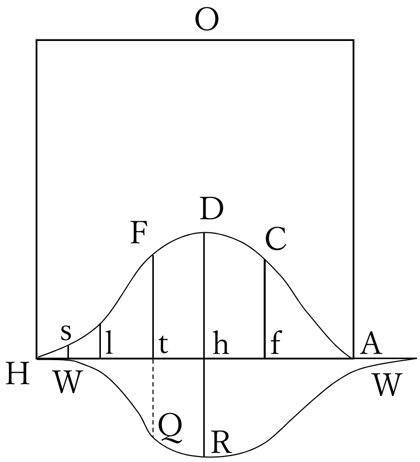
とはいえ，この〈論文〉における解法を何より魅力的にしているのは，情報が最も不足しているような場合，そしてド・モアブル氏による逆問題の解法がほとんど何の指示も与えられないような場合でも，完全だという点である。私は，ｐかｑのいずれかがさほど大きな量を持たない，すべての場合について述べている。これ以外の場合には，すなわちｐとｑの両方が非常に大きいときには，ここで証明された事柄を真実と認めることは困難ではない。つまり一般的に言って，ある出来事が発生する偶然は，ｐがｑに対するのと同じ〈比率〉で，その出来事が失敗する偶然に近づいていくと信じるに足る根拠が存在する。ただし，ｐもしくはｑが小さいときに私たちがこういう仕方で判断を下すと，ひどく欺か

れることになるだろう。そして，そのような場合には，ある出来事の正確な確率を見出す上で〈データ〉は不十分なのだが，それでも，その内に正確な確率が存在すると合理的に考えるに足る範囲を見出し得ること，さらには，データに関連付けられた結論や主張に適した精確な同意の程度を決定できることは，非常に好ましい〔agreeable〕ことである。

訳注

１）プライスは『王立協会紀要』第 54 巻（1765 年刊）に「偶然論における一問題の解法の規則２の証明」と題した論文を掲載した。1764 年 11 月 26 日付のカントン宛書簡に同封されるかたちで協会に送られ，同年 12 月 6 日に読み上げられている。プライスが同書簡中で語るところによると，原論文（つまり Bayes 1764b）に彼が付加した箇所の証明に不十分な点があると自覚したため，また原論文の補遺の最後に付した注（原注ⅶ）で予告したための措置である。書簡の後段でプライスは，「今は亡き私たちの尊敬すべき友人の力量と技量」に助けられて，学問（philosophy）は，結果から未知の原因を決定する導き手を得ただけでなく，学問が陥りがちな「一大危険」すなわち「不十分な帰納の上に結論を打ち立てる危険」そして「正当な結論を，多数の経験（experiments）が請け合う以上の確証を持つものとして受け入れる危険」に対する防護手段も得たのだと述べる（Price 1765, 296-97）。この「危険」に関連した，学問上の「システム」の支配に対するプライスの警戒については訳注１０を参照。

右図は Bayes 1764b において命題１０を導出するに際して用意された図（林 2021, 85）に加筆の上で，Price 1765 の本文冒頭に掲げられたものを再現している。以下ではこの図を用いながら，プライスが「主にベイズ氏自身の言葉を用いて」（Price 1765, 296）書き起こしたと述べる規則２の導出過程を確認しておきたい（*Ibid.*, 298-310）。①～⑫は本文に付された項目番号に対応させてある。またベイズ＆プライスによる説明が十分ではないと見なした場合，デイルによる簡明な解説（Dale 2003, 353-59）も参照しつつ，筆者の責任で言葉や数式を補った箇所が少なくないことを最初に断っておく。



①Ａｈ＝ｐ，Ｈｈ＝ｑとし，ｐ＋ｑ＝ｎとしてａ＝$\frac{p}{n}$およびｂ＝$\frac{q}{n}$とする。命題１０の第２節（林 2021, 86）より曲線図形ＡＣｆの面積／正方形ＨＯの面積は$\frac{x^{p+1}r^{q}}{p+1}+\frac{q}{p+1}\times\frac{x^{p+2}r^{q-1}}{p+2}+\frac{q}{p+1}\times\frac{q-1}{p+2}\times\frac{x^{p+3}r^{q-2}}{p+3}+\cdots$だから，ｘ＝ａおよびｒ＝ｂと置き，ＣｆをＤｈの位置まで動かすと，ＡＤｈ／ＨＯ＝$\frac{a^{p+1}b^{q}}{p+1}\times\left(1+\frac{q}{p+2}\times\frac{p}{q}+\frac{q\times(q-1)\times p^{2}}{(p+2)\times(p+3)\times q^{2}}+\cdots\right)$となる。ここで括弧内の級数第二項の$\frac{p}{q}=\frac{x}{r}=\frac{a}{b}=\frac{P}{n}\times\frac{n}{q}$である。同様に，命題１０の第３節（*Ibid.*）よりＨＣｆ／ＨＯ＝$\frac{r^{q+1}x^{p}}{q+1}+\frac{p}{q+1}\times\frac{r^{q+2}x^{p-1}}{q+2}+\frac{p}{q+1}\times\frac{p-1}{q+2}\times\frac{r^{q+3}x^{p-2}}{q+3}+\cdots$だから，ＨＤｈ／ＨＯ＝$\frac{a^{p}b^{q+1}}{q+1}\times$

（１＋$\frac{p}{q+2}$×$\frac{q}{p}$＋$\frac{p\times(p-1)\times q^2}{(q+2)\times(q+3)\times p^2}$＋…）である。$\frac{a^{p+1}b^q}{p+1}$＝$\frac{a^pb^q}{n}$×$\frac{na}{p+1}$＝$\frac{a^pb^q}{n}$×$\frac{p}{p+1}$，$\frac{a^pb^{q+1}}{q+1}$＝$\frac{a^pb^q}{n}$×$\frac{nb}{q+1}$＝$\frac{a^pb^q}{n}$×$\frac{q}{p+1}$より，二つの面積差（ＡＤｈ－ＨＤｈ）／ＨＯ＝$\frac{a^pb^q}{n}$×｛($\frac{p}{p+1}$＋$\frac{q}{p+1}$×$\frac{p^2}{(p+2)q}$＋$\frac{q\times(q-1)\times p^3}{(p+1)\times(p+2)\times(p+3)q^2}$＋…）－（$\frac{q}{q+1}$＋$\frac{p}{q+1}$×$\frac{q^2}{p(q+2)}$＋$\frac{p\times(p-1)\times q^3}{(q+1)\times(q+2)\times(q+3)p^2}$＋…)｝と表せる。面積差が負の値になるようならＡＤｈとＨＤｈを入れ替えればよい。

②上掲①末尾に示した式の括弧内にある二つの級数に着目する。前者の級数の任意の位置にある項を，後者の級数で対応する位置にある項の二つ後ろの項で割るとしよう。例えば前者の第三項（上記）を後者の第五項$\frac{p(p-1)(p-2)(p-3)q^5}{(q+1)(q+2)(q+3)(q+4)(q+5)p^4}$で割ると，商は$\frac{(q+1)(q+2)(q+3)q(q+4)(q-1)(q+5)p^7}{p(p+1)(p-1)(p+2)(p-2)(p+3)(p-3)q^7}$ ＝ $\frac{(pq+p)(pq+2p)(pq+3p)pq(pq+4p)(pq-p)(pq+5p)}{pq(pq+q)(pq-q)(pq+2q)(pq-2q)(pq+3q)(pq-3q)}$ ＝ $\frac{pq+p}{pq}$×$\frac{pq+2p}{pq+q}$×$\frac{pq+3p}{pq-q}$×$\frac{pq}{pq+2q}$×$\frac{pq+4p}{pq-2q}$×$\frac{pq-p}{pq+3q}$×$\frac{pq+5p}{pq-3q}$であり，$\frac{pq+2p}{pq+q}$を$\frac{pq+2p}{pq}$×$\frac{pq}{pq+q}$に分解すると全８個の数の積として表示することができる。前者の第四項と後者の第六項以降も×$\frac{pq-2p}{pq+4q}$×$\frac{pq+6p}{pq-4q}$×$\frac{pq-3p}{pq+5q}$×$\frac{pq+7p}{pq-5q}$×…のように続く。前者の級数の第Ｌ項と第一項との距離をＬ－１と置くと，上記の積の対象となる個数は２×（Ｌ－１）＋４で表せる。またｑ＞ｐであれば，この積は１すなわち分子と分母の対等比よりも大きい。例えば，先の全８個の数の積を変形すると$\frac{pq+p}{pq+q}$×$\frac{pq-p}{pq-q}$×$\frac{pq+2p}{pq+2q}$×$\frac{pq+4p}{pq-2q}$×$\frac{pq+3p}{pq+3q}$×$\frac{pq+5p}{pq-3q}$であり，整理すると$\frac{p^2q^2-p^2}{p^2q^2-q^2}$×$\frac{p^2q^2+6p^2q+8p^2}{p^2q^2-4q^2}$×$\frac{p^2q^2+8p^2q+15p^2}{p^2q^2-9q^2}$である。ｑ＞ｐならば$\frac{p^2q^2-p^2}{p^2q^2-q^2}$＞１であり，残り２個の数の分母＜分子であるから，この３個数の積は１より大きいと分かる。さらに，後者の級数の初めの二項$\frac{q}{q+1}$＋$\frac{p}{q+1}$×$\frac{q^2}{p(q+2)}$は前項も後項もそれぞれ１より小さく（後項は$\frac{q^2}{(q+1)(q+2)}$＝$\frac{q^2}{q^2+3q+2}$＜１である），その和は決して２を超えない。前者の級数の第Ｌ項の値を後者の級数の第Ｌ＋２項の値で割った商は，すでに見た通り１より大きいため，前者の級数の各項の総和と後者の級数の第三項以降の総和を比較すれば，前者のほうが必ず大きい。後者の級数の総和から前者の級数の総和を引いた差が正の値の場合，その値には後者の級数の初めの二項が作用しているが，この二項の和は前述の通り必ず２未満である。したがって，上掲①で確認した通り（ＨＤｈ－ＡＤｈ）／ＨＯ＝$\frac{a^pb^q}{n}$×（級数の総和の差）だから，面積差は決して$\frac{2a^pb^q}{n}$に達しないと分かる。

③先の図のＡＨ＝１とし，ＣｆとＦｔは，Ｄｈの左右に，Ｄｈから等距離ｚ／ＡＨを隔てて配置されているとする。Ｃｆ／ＡＨ＝ｙ，Ａｆ／ＡＨ＝ｘ，Ｈｆ／ＡＨ＝ｒと置くと$y=x^pr^q$で，これは命題１０の第１節（*Ibid.*, 85）で示された通りである。上掲①より（ｎ＝１のとき）Ａｈ／ＡＨ＝ｐ＝ａ，Ｈｈ／ＡＨ＝ｑ＝ｂだから，Ａｆ＝Ａｈ－ｈｆ＝ａ－ｚ＝ｘ，Ｈｆ＝Ｈｈ＋ｈｆ＝ｂ＋ｚ＝ｒである。よってＣｆ＝$(a-z)^p(b+z)^q$と表記でき，同様にＦｔ＝$(a+z)^p(b-z)^q$と分かる。

④ｑ＞ｐならば，Ｆｔ＞Ｃｆすなわち$(a+z)^p(b-z)^q>(a-z)^p(b+z)^q$であり，ｚが増大するほど比率ＦＴ／Ｃｆの値も大きくなることを示そう。この比の双曲（自然）対数を取ると $\log\frac{(a+z)^p(b-z)^q}{(a-z)^p(b+z)^q}$で，上掲①よりｐにｎａを，ｑにｎｂを代

入して整理するとｎａ×$\log\frac{a+z}{a-z}$＋ｎｂ×$\log\frac{b-z}{b+z}$と書ける。さらに$\frac{a+z}{a-z}$と$\frac{b-z}{b+z}$の分子と分母をそれぞれａとｂで割ることで，$\log\frac{1+z/a}{1-z/a}=\log\left(1+\frac{z}{a}\right)-\log\left(1-\frac{z}{a}\right)$と$\log\frac{1-z/b}{1+z/b}=\log\left(1-\frac{z}{b}\right)-\log\left(1+\frac{z}{b}\right)$を導ける。両者をマクローリン展開して整理すると，$\left(\frac{z}{a}-\frac{(z/a)^2}{2}+\frac{(z/a)^3}{3}-\frac{(z/a)^4}{4}+\frac{(z/a)^5}{5}-\cdots\right)-\left(-\frac{z}{a}-\frac{(-z/a)^2}{2}+\frac{(-z/a)^3}{3}-\frac{(-z/a)^4}{4}+\frac{(-z/a)^5}{5}-\cdots\right)=2\times\left(\frac{z}{a}+\frac{z^3}{3a^3}+\frac{z^5}{5a^5}+\cdots\right)$および$\left(-\frac{z}{b}-\frac{(-z/b)^2}{2}+\frac{(-z/b)^3}{3}-\frac{(-z/b)^4}{4}+\frac{(-z/b)^5}{5}-\cdots\right)-\left(\frac{z}{b}-\frac{(z/b)^2}{2}+\frac{(z/b)^3}{3}-\frac{(z/b)^4}{4}+\frac{(z/b)^5}{5}-\cdots\right)=(-2)\times\left(\frac{z}{b}+\frac{z^3}{3b^3}+\frac{z^5}{5b^5}+\cdots\right)$となるので，ｎａを前者，ｎｂを後者に掛け合わせると２ｎ×$\left(z+\frac{z^3}{3a^2}+\frac{z^5}{5a^4}+\cdots\right)$および（－２ｎ）×$\left(z+\frac{z^3}{3b^2}+\frac{z^5}{5b^4}+\cdots\right)$である。これらの和は２ｎ×$\left\{(z-z)+\left(\frac{z^3}{3a^2}-\frac{z^3}{3b^2}\right)+\left(\frac{z^5}{5a^4}-\frac{z^5}{5b^4}\right)+\cdots\right\}$であるから，さらに分数を整理して２ｎ×$\left(\frac{b^2-a^2}{3a^2b^2}\times z^3+\frac{b^4-a^4}{5a^4b^4}\times z^5+\cdots\right)$とまとめられる。括弧内の級数の各項はｂ＞ａ（ｎｂ＞ｎａ）ならばつねに正である。したがって，ｎｂ＝ｑ，ｎａ＝ｐより，ｑ＞ｐのときこの対数はつねに正の値を取り，その値はｚが増大すればするほど大きくなると分かる。また，この対数の大きさは正なのだから，log１＝０をふまえてＦｔ／Ｃｆ＝$\frac{(a+z)^p(b-z)^q}{(a-z)^p(b+z)^q}$＞１と証明できる。

⑤上掲④より，ｑ＞ｐならばＦｔ＞Ｃｆであり，かつｚすなわちｈｔ＝ｈｆが大きくなるほどＦｔ／Ｃｆも大きくなる。このとき，面積ＤｈｔＦ＞ＤｈｆＣもつねに成り立ち，ｈｔ＝ｈｆが大きくなるほど面積差も開くことは明らかである。

⑥ｈｌ＝Ａｈとすれば，ｈｌから立ち上がるＨＤｈの面積はＡＤｈの面積より大きくなり，（ＨＤｈ／ＡＤｈ）＞（ＤｈｔＦ／ＤｈｆＣ）である。なぜなら，つねにｈｌ＞ｈｔ（＝ｚ）かつＡｈ＞ｈｆ（＝ｚ）だから，上掲⑤より，ＨＤｈとＡＤｈとの面積差はＤｈｔＦとＤｈｆＣとのそれよりも大きくならなければならないからである。したがって，Ｈｈ＞ｈｌより，ｑ（＝Ｈｈ）がｐ（＝Ａｈ）より大きくなればなるほど（ＨＤｈ／ＡＤｈ）－（ＤｈｔＦ／ＤｈｆＣ）の値は増大する。

⑦ｚを流量として$\left(1-\frac{n^2z^2}{pq}\right)^{\frac{n}{2}}$の流率（表記法については林 2021 の訳注１６参照）を求めると，合成関数の微分より$\frac{n}{2}\times\left(-2\times\frac{n^2}{pq}z\dot{z}\right)\times\left(1-\frac{n^2z^2}{pq}\right)^{\frac{n}{2}-1}=\left(-\frac{n^3}{pq}z\dot{z}\right)\left(1-\frac{n^2z^2}{pq}\right)^{\frac{n}{2}-1}$となる。同様に$\left(1-\frac{nz}{p}\right)^p\times\left(1+\frac{nz}{q}\right)^q$の流率は$-n\dot{z}\times\left(1-\frac{nz}{p}\right)^{p-1}\times\left(1+\frac{nz}{q}\right)^q+n\dot{z}\times\left(1-\frac{nz}{p}\right)^p\times\left(1+\frac{nz}{q}\right)^{q-1}=n\dot{z}\times\left\{\left(1-\frac{nz}{p}\right)^p\left(1+\frac{nz}{q}\right)^{q-1}-\left(1-\frac{nz}{p}\right)^{p-1}\left(1+\frac{nz}{q}\right)^q\right\}=n\dot{z}\times\left\{\left(1-\frac{nz}{p}\right)^p\left(1+\frac{nz}{q}\right)^q\times\frac{(1-nz/p)-(1+nz/q)}{(1-nz/p)(1+nz/q)}\right\}=n\dot{z}\times nz\times\left\{\left(1-\frac{nz}{p}\right)^{p-1}\left(1+\frac{nz}{q}\right)^{q-1}\left(-\frac{p+q}{pq}\right)\right\}$で，ｐ＋ｑ＝ｎとす

ると，この積は$\left(-\frac{n^3}{pq}z\dot{z}\right)\left(1-\frac{nz}{p}\right)^{p-1}\left(1+\frac{nz}{q}\right)^{q-1}$とまとめられる。$f_1(z)=\left(1-\frac{n^2z^2}{pq}\right)^{\frac{n}{2}}$，$f_2(z)=\left(1-\frac{nz}{p}\right)^p\left(1+\frac{nz}{q}\right)^q$と置くと，$f_1(z)/f_2(z)=\{f_1'(z)\times\left(1-\frac{n^2z^2}{pq}\right)\}/\{f_2'(z)\times\left(1-\frac{nz}{p}\right)\left(1+\frac{nz}{q}\right)\}$と書ける（$-\frac{n^3}{pq}z\dot{z}$は相殺される）。いま$q>p$ならば$\left(1-\frac{n^2z^2}{pq}\right)=\left(1-\frac{nz}{p}\right)\left(1+\frac{nz}{q}\right)-\left(\frac{nz}{q}-\frac{nz}{p}\right)$で$\frac{nz}{p}>\frac{nz}{q}$より$\frac{nz}{q}-\frac{nz}{p}<0$，したがって$\left(1-\frac{n^2z^2}{pq}\right)>\left(1-\frac{nz}{p}\right)\left(1+\frac{nz}{q}\right)$である。先の式を変形して$f_2'(z)/f_2(z)=\{f_1'(z)/f_1(z)\}\times\{\left(1-\frac{n^2z^2}{pq}\right)/\left(1-\frac{nz}{p}\right)\left(1+\frac{nz}{q}\right)\}$，ここで$\{\left(1-\frac{n^2z^2}{pq}\right)/\left(1-\frac{nz}{p}\right)\left(1+\frac{nz}{q}\right)\}>1$より絶対値を比較すると$f_2'(z)/f_2(z)>f_1'(z)/f_1(z)$と分かる。つまり関数$f_2(z)$の変化率は$f_1(z)$の変化率を上回る。また，$f_1'(z)$および$f_2'(z)$の符号は負なので，$f_1(z)$と$f_2(z)$は$z$の増大につれて減少する。$z=0$ならば$f_1(0)=f_2(0)=1$であり，両関数の傾きに他ならない流率を絶対値で比較した際に$f_2'(0)>f_1'(0)$が確実に成立するため，zの値をそれよりも大きくするのであれば$f_1(z)>f_2(z)$となるだろう。$f_2(z)$のpとqを入れ替えた関数$f_3(z)=\left(1-\frac{nz}{q}\right)^q\left(1+\frac{nz}{p}\right)^p$についても同様に整理し，$f_3'(z)=\left(-\frac{n^3}{pq}z\dot{z}\right)\left(1-\frac{nz}{q}\right)^{q-1}\left(1+\frac{nz}{p}\right)^{p-1}$より$f_3'(z)/f_3(z)=\{f_1'(z)/f_1(z)\}\times\{\left(1-\frac{n^2z^2}{pq}\right)/\left(1-\frac{nz}{q}\right)\left(1+\frac{nz}{p}\right)\}$と分かるから，$q>p$ならば$\left(1-\frac{n^2z^2}{pq}\right)<\{1+(\frac{nz}{p}-\frac{nz}{q})-\frac{n^2z^2}{pq}\}$で，絶対値を比べると$f_3'(z)/f_3(z)<f_1'(z)/f_1(z)$である。よって$f_1(0)=f_3(0)=1$のとき，$f_1(0)$の流率（傾きは負）の絶対値は$f_3(0)$のそれより確実に大きく，$z>0$のときには$f_3(z)>f_1(z)$となるだろう。

以上より，$q>p$ならば，$z=0$でないかぎり$f_1(z)>f_2(z)$かつ$f_1(z)<f_3(z)$であろう。上掲①を受けて$a=\frac{p}{n}$と$b=\frac{q}{n}$を関数に代入すると，$f_2(z)=\left(\frac{a-z}{a}\right)^p\left(\frac{b+z}{b}\right)^q=\frac{(a-z)^p(b+z)^q}{a^pb^q}$ならびに$f_3(z)=\left(\frac{a+z}{a}\right)^p\left(\frac{b-z}{b}\right)^q=\frac{(a+z)^p(b-z)^q}{a^pb^q}$となるので，$a^pb^q\times\left(1-\frac{n^2z^2}{pq}\right)^{\frac{n}{2}}>(a-z)^p(b+z)^q$かつ$a^pb^q\times\left(1-\frac{n^2z^2}{pq}\right)^{\frac{n}{2}}<(a+z)^p(b-z)^q$である。

⑧上掲③より$Ft=(a+z)^p(b-z)^q$および$Cf=(a-z)^p(b+z)^q$である。ここで，$Ft/Qt=(a+z)^p(b-z)^q/\{a^pb^q\times\left(1-\frac{n^2z^2}{pq}\right)^{\frac{n}{2}}\}$となるように$Ft$を下方に延長して点Qをとる。上掲⑦より$Cf<Qt<Ft$で，$Ft$と$Cf$と$Qt$は長さ$z$の水平線分を共有しているため面積の大小についても同様だと言える。すなわち，Dhを下方に延長して$Dh=Rh$となるように点Rをとるなら，$DhfC<RhtQ<DhtF$である。

⑨上掲⑧で見た通りＱｔ＝ａ^{p}ｂ^{q}×$\left(1-\frac{n^2z^2}{pq}\right)^{\frac{n}{2}}$である。デイルに倣って$\frac{n}{\sqrt{pq}}$＝α，$\frac{n}{2}$＝βと置くと$\left(1-\frac{n^2z^2}{pq}\right)^{\frac{n}{2}}$＝（１－α^{2}ｚ^2）$^{\beta}$と表せるので，これをマクローリン展開すると１－β×α^{2}ｚ^2＋$\frac{\beta(\beta-1)}{2}$×α^{4}ｚ^4－$\frac{\beta(\beta-1)(\beta-2)}{6}$×α^{6}ｚ^6＋…である。ｚで積分するとｚ－$\frac{\alpha^2\beta}{3}$×ｚ^3＋$\frac{\alpha^4\beta(\beta-1)}{10}$×ｚ^5－$\frac{\alpha^6\beta(\beta-1)(\beta-2)}{42}$×ｚ^7＋…だから，αとβに元の値を代入してｚ－$\frac{n^3z^3}{6pq}$＋$\frac{(n-2)n^5z^5}{40p^2q^2}$－$\frac{(n-2)(n-4)n^7z^7}{336p^3q^3}$＋…となる。したがって，上掲①同様に面積を表すと，ＲｈｔＱ／ＨＯ＝ａ^{p}ｂ^{q}×（ｚ－$\frac{n^3z^3}{6pq}$＋$\frac{(n-2)n^5z^5}{40p^2q^2}$－$\frac{(n-2)(n-4)n^7z^7}{336p^3q^3}$＋…）であると分かる（デイルも指摘するように，ベイズ＆プライスの原文では，括弧内の級数の分子中のｚ^{5}が２^{5}と誤植されている）。ｍ^2＝$\frac{n^3}{2pq}$（ｍ＝$\frac{n\sqrt{n}}{\sqrt{2pq}}$）としたとき，この式の右辺はａ^{p}ｂ^{q}×$\frac{\sqrt{2pq}}{n\sqrt{n}}$×ｍｚ×（１－$\frac{m^2z^2}{3}$＋$\frac{(n-2)m^4z^4}{10n}$－$\frac{(n-2)(n-4)m^6z^6}{42n^2}$＋…）と表記できる。いま$\frac{n^2z^2}{pq}$＝１（Ｑｔ＝０）とすれば$\frac{n^2}{pq}$＝$\frac{1}{z^2}$よりｍ^2＝$\frac{n}{2z^2}$だから，括弧内の級数は１－$\frac{n}{2}$×$\frac{1}{3}$＋$\frac{n-2}{n}$×$\left(\frac{n}{2}\right)^2$×$\frac{1}{10}$－$\frac{n-2}{n}$×$\frac{n-4}{n}$×$\left(\frac{n}{2}\right)^3$×$\frac{1}{42}$＋…であり，Ｂ^2＝$\frac{n}{2}$と置くと１－$\frac{B^2}{3}$＋$\frac{B^2-1}{2\times B^2}$×$\frac{B^4}{5}$－$\frac{B^2-1}{2\times B^2}$×$\frac{B^2-2}{3\times B^2}$×$\frac{B^6}{7}$＋…と書き換えられる。ｍｚ＝$\sqrt{\frac{n}{2z^2}}$×ｚ＝$\sqrt{\frac{n}{2}}$＝Ｂより，上記括弧内の級数にｍｚを掛け合わせたものはＢ－$\frac{B^3}{3}$＋$\frac{B^2-1}{2B^2}$×$\frac{B^5}{5}$－$\frac{B^2-1}{2B^2}$×$\frac{B^2-2}{3B^2}$×$\frac{B^7}{7}$＋…（γと置く）である。

⑩上掲⑨より，Ｑｔ＝０のときのＲｈｔＱすなわちＲＱＷｈの面積とＨＯの面積との比率はａ^{p}ｂ^{q}×$\frac{\sqrt{2pq}}{n\sqrt{n}}$×γと分かる。Bayes 1764b の命題１０の第４節（*Ibid.*, 86-87）をふまえると，面積ＡＣＦＨ／ＨＯ＝$\frac{1}{n+1}$×$\frac{1}{E}$で，このときＥは（ａ＋ｂ）$^{p+q}$を展開した際の二項係数である。したがって，ＲＱＷｈ／ＡＣＦＨ＝（ＨＯ／ＡＣＦＨ）×（ＲＱＷｈ／ＨＯ）＝（ｎ＋１）×Ｅ×上記比率＝$\frac{n+1}{n}$×$\frac{\sqrt{2pq}}{\sqrt{n}}$×Ｅａ^{p}ｂ^{q}×γと表記できる。いまｐ＝ｑ＝$\frac{n}{2}$とすると，上掲①冒頭の定義よりａ＝ｂ＝$\frac{1}{2}$である。よってＱｔ＝ａ^{p}ｂ^{q}×$\left(1-\frac{n^2z^2}{pq}\right)^{\frac{n}{2}}$＝$\left(\frac{1}{2}\right)^{p}$×$\left(\frac{1}{2}\right)^{q}$×（１＋２ｚ）^{p}×（１－２ｚ）^{q}＝（$\frac{1}{2}$＋ｚ）^{p}（$\frac{1}{2}$－ｚ）^{q}＝Ｆｔ＝Ｃｆとなるから，上掲⑧も改めて確認すると面積ＲＱＷｈ＝ＨＤｈ＝ＡＤｈであり，ＡＣＦＨ＝ＨＤｈ＋ＡＤｈよりＲｈｔＱ／ＡＣＦＨ＝$\frac{n+1}{n}$×$\frac{\sqrt{2pq}}{\sqrt{n}}$×Ｅａ^{p}ｂ^{q}×γ＝１／２となる。いま（ａ＋ｂ）^{n}を展開した級数の中間項（ここでは$\frac{n}{2}$番目の項と見なす。林 2021 の訳注２も参照）の係数をＧとし，ｐ，ｑ，ａ，ｂにそれぞれ先述の値を代入して

整理すると，Ｅ＝Ｇより上式は$\frac{n+1}{\sqrt{2n}}\times G\times\frac{1}{2^n}\times\gamma=1/2$となるため，等式を成り立たせるには$\gamma=\frac{\sqrt{2n}}{n+1}\times\frac{1}{G}\times 2^{n-1}$でなければならない。上掲⑨の導出過程を見れば明らかな通り，γはＢひいてはｎ（＝ｐ＋ｑ）の値にしか依存しないから，ｐとｑが変動しようとも，その和であるｎが不変であれば一定である。よってＲＱＷｈとＡＣＦＨの面積比はつねに$\frac{n+1}{n}\times\frac{\sqrt{2pq}}{\sqrt{n}}\times Ea^pb^q\times\frac{\sqrt{2n}}{n+1}\times\frac{1}{G}\times 2^{n-1}=\frac{\sqrt{pq}}{n}\times\frac{Ea^pb^q}{G}\times 2^n$だと分かる。

⑪面積ＲｈｔＱ／ＡＣＦＨ＝（ＨＯ／ＡＣＦＨ）×（ＲｈｔＱ／ＨＯ）だから，上掲⑨および⑩より，この面積比は$\frac{n+1}{n}\times\frac{\sqrt{2pq}}{\sqrt{n}}\times Ea^pb^q\times\left(mz-\frac{m^3z^3}{3}+\frac{(n-2)m^5z^5}{10n}-\frac{(n-2)(n-4)m^7z^7}{42n^2}+\cdots\right)$である。また上掲⑩で求めたようにＲＱＷｈ／ＡＣＦＨ＝$\frac{\sqrt{pq}}{n}\times\frac{Ea^pb^q}{G}\times 2^n$である。したがってＲｈｔＱ／ＲＱＷｈ＝（ＲｈｔＱ／ＡＣＦＨ）×（ＡＣＦＨ／ＲＱＷｈ）＝$\frac{n+1}{\sqrt{n}}\times\frac{\sqrt{2}}{2^n}\times G\times\left(mz-\frac{m^3z^3}{3}+\cdots\right)$となる。

⑫上掲②より，ｑ＞ｐならば面積$\frac{HDh-ADh}{HO}<\frac{2a^pb^q}{n}$だから，$\frac{HDh}{HO}<\frac{ADh}{HO}+\frac{2a^pb^q}{n}$かつ$\frac{ADh}{HO}>\frac{HDh}{HO}-\frac{2a^pb^q}{n}$である。また，上掲⑩でも確認した通り$\frac{HDh+ADh}{HO}=\frac{1}{n+1}\times\frac{1}{E}$である。よって$\frac{HDh+HDh}{HO}<\left(\frac{HDh+ADh}{HO}+\frac{2a^pb^q}{n}\right)$すなわち$\frac{1}{(n+1)E}+\frac{2a^pb^q}{n}$，かつ$\frac{ADh+ADh}{HO}>\left(\frac{HDh+ADh}{HO}-\frac{2a^pb^q}{n}\right)$すなわち$\frac{1}{(n+1)E}-\frac{2a^pb^q}{n}$である。したがって$\frac{2HDh}{2ADh}<\left\{\left(\frac{1}{(n+1)E}+\frac{2a^pb^q}{n}\right)/\left(\frac{1}{(n+1)E}-\frac{2a^pb^q}{n}\right)\right\}$より$\frac{HDh}{ADh}<\frac{n+2a^pb^q(n+1)E}{n-2a^pb^q(n+1)E}$ $\left(=\left.1+2Ea^pb^q+\frac{2Ea^pb^q}{n}\middle/1-2Ea^pb^q-\frac{2Ea^pb^q}{n}\right.\right)$と書ける。なお，原文では分子を１「×」２Ｅａ^{p}ｂ^{q}…と記すが，正しくは乗算記号を加算記号に改めねばならない（Price 1765, 306; Dale 2003, 358）。また上掲⑥よりｑ＞ｐならば（ＨＤｈ／ＡＤｈ）＞（ＤｈｔＦ／ＤｈｆＣ）だから，総合すると$\frac{DhtF}{DhfC}<\frac{1+2Ea^pb^q+\frac{2Ea^pb^q}{n}}{1-2Ea^pb^q-\frac{2Ea^pb^q}{n}}$と判明する。さらに，上掲⑧よりＤｈｆＣ＜ＲｈｔＱ＜ＤｈｔＦだから，$\frac{DhtF}{RhtQ}<\frac{DhtF}{DhfC}<\frac{1+2Ea^pb^q+\frac{2Ea^pb^q}{n}}{1-2Ea^pb^q-\frac{2Ea^pb^q}{n}}$であると同時に，逆数を取って$\frac{DhfC}{RhtQ}>\frac{DhfC}{DhtF}>\frac{1-2Ea^pb^q-\frac{2Ea^pb^q}{n}}{1+2Ea^pb^q+\frac{2Ea^pb^q}{n}}$である。

以上１２項目を基礎として，ベイズ＆プライスは規則２を以下のように証明する。

上掲⑪を受けて，$\Sigma=\frac{RhtQ}{ACFH}=\frac{n+1}{n}\times\frac{\sqrt{2pq}}{\sqrt{n}}\times Ea^pb^q\times\left(mz-\frac{m^3z^3}{3}+\cdots\right)$と置く。上掲⑧よりＤｈｔＦ＞ＲｈｔＱだから，$\frac{RhtQ}{ACFH}<\frac{DhtF}{ACFH}$すなわち$\Sigma<\frac{DhtF}{ACFH}$と分かる。さらに上掲⑫もふまえると$\frac{DhtF}{ACFH}=\left(\frac{RhtQ}{ACFH}\times\frac{DhtF}{RhtQ}\right)<\Sigma\times\frac{1+2Ea^pb^q+\frac{2Ea^pb^q}{n}}{1-2Ea^pb^q-\frac{2Ea^pb^q}{n}}$である。ここで，過去

ｎ回の試行でｐ回起きｑ回起きなかった出来事（ただしｑ＞ｐ）の次の一回の発生確率が$\frac{p}{n}$（＝ａ）と$\frac{p}{n}$（＝ｂ）＋ｚの間にあると推測するならば，$\frac{p}{n}=\frac{Ah}{AH}$かつ$\frac{p}{n}$＋ｚ＝$\frac{At}{AH}$より，この推測が正しい確率（$\Delta_1$と置く）は面積ＤｈｔＦのＡＣＦＨに対する比率になる。したがって$\Sigma<\Delta_1<\Sigma\times\frac{1+2Ea^pb^q+\frac{2Ea^pb^q}{n}}{1-2Ea^pb^q-\frac{2Ea^pb^q}{n}}$と判明する。同様に，次の一回の発生確率が$\frac{p}{n}$と$\frac{p}{n}$－ｚ（＝$\frac{Af}{AH}$）の間にあると推測するならば，この推測が正しい確率（Δ_2と置く）は面積ＤｈｆＣのＡＣＦＨに対する比率になる。上掲⑧よりＲｈｔＱ＞ＤｈｆＣだから，$\frac{RhtQ}{ACFH}>\frac{DhfC}{ACFH}$すなわち$\Sigma>\frac{DhfC}{ACFH}$であり，上掲⑫より$\frac{DhfC}{ACFH}=\left(\frac{RhtQ}{ACFH}\times\frac{DhfC}{RhtQ}\right)>\Sigma\times\frac{1-2Ea^pb^q-\frac{2Ea^pb^q}{n}}{1+2Ea^pb^q+\frac{2Ea^pb^q}{n}}$である。よって$\Sigma\times\frac{1-2Ea^pb^q-\frac{2Ea^pb^q}{n}}{1+2Ea^pb^q+\frac{2Ea^pb^q}{n}}<\Delta_2<\Sigma$と分かる。仮にｐ＞ｑの場合にはＦｔとＣｆの長さが逆転する（Ｑｔの長さは変わらない）ため，$\frac{DhtF}{RhtQ}>\frac{DhtF}{DhfC}>\frac{1-2Ea^pb^q-\frac{2Ea^pb^q}{n}}{1+2Ea^pb^q+\frac{2Ea^pb^q}{n}}$となるから$\frac{DhtF}{ACFH}=\left(\frac{RhtQ}{ACFH}\times\frac{DhtF}{RhtQ}\right)>\Sigma\times\frac{1-2Ea^pb^q-\frac{2Ea^pb^q}{n}}{1+2Ea^pb^q+\frac{2Ea^pb^q}{n}}$であり，$\frac{RhtQ}{ACFH}>\frac{DhtF}{ACFH}$より$\Sigma>\frac{DhtF}{ACFH}$だから$\Sigma\times\frac{1-2Ea^pb^q-\frac{2Ea^pb^q}{n}}{1+2Ea^pb^q+\frac{2Ea^pb^q}{n}}<\Delta_1<\Sigma$である。同様に，$\frac{DhfC}{RhtQ}<\frac{DhfC}{DhtF}<\frac{1+2Ea^pb^q+\frac{2Ea^pb^q}{n}}{1-2Ea^pb^q-\frac{2Ea^pb^q}{n}}$より$\frac{DhfC}{ACFH}=\left(\frac{RhtQ}{ACFH}\times\frac{DhfC}{RhtQ}\right)<\Sigma\times\frac{1-2Ea^pb^q-\frac{2Ea^pb^q}{n}}{1+2Ea^pb^q+\frac{2Ea^pb^q}{n}}$であり，かつ$\frac{RhtQ}{ACFH}<\frac{DhfC}{ACFH}$より$\Sigma>\frac{DhfC}{ACFH}$だから$\Sigma<\Delta_2<\Sigma\times\frac{1+2Ea^pb^q+\frac{2Ea^pb^q}{n}}{1-2Ea^pb^q-\frac{2Ea^pb^q}{n}}$となる。また，仮にｐ＝ｑであれば上掲⑩よりＦｔ＝Ｃｆ＝Ｑｔだから，面積ＤｈｔＦ＝ＤｈｆＣ＝ＲｈｔＱである。したがって$\frac{DhtF}{ACFH}$（$=\Delta_1$）＝$\frac{DhfC}{ACFH}$（$=\Delta_2$）＝$\frac{RhtQ}{ACFH}=\Sigma$と分かる。

　これらのことから，次の一回の発生確率が$\frac{p}{n}$＋ｚと$\frac{p}{n}$－ｚの間にあると推測するのが正しい確率（Δ_3と置く）は$\Delta_1+\Delta_2$で表される。$p\neq q$ならば$\Sigma+\Sigma\times\frac{1-2Ea^pb^q-\frac{2Ea^pb^q}{n}}{1+2Ea^pb^q+\frac{2Ea^pb^q}{n}}<\Delta_3<\Sigma+\Sigma\times\frac{1+2Ea^pb^q+\frac{2Ea^pb^q}{n}}{1-2Ea^pb^q-\frac{2Ea^pb^q}{n}}$で，$2Ea^pb^q+\frac{2Ea^pb^q}{n}=\delta$と置いて整理すると，$\Sigma+\Sigma\times\frac{1-2Ea^pb^q-\frac{2Ea^pb^q}{n}}{1+2Ea^pb^q+\frac{2Ea^pb^q}{n}}=\frac{(1+\delta)\Sigma+(1-\delta)\Sigma}{1+\delta}=\frac{2\Sigma}{1+\delta}$，$\Sigma+\Sigma\times\frac{1+2Ea^pb^q+\frac{2Ea^pb^q}{n}}{1-2Ea^pb^q-\frac{2Ea^pb^q}{n}}=\frac{(1-\delta)\Sigma+(1+\delta)\Sigma}{1-\delta}=\frac{2\Sigma}{1-\delta}$，したがって$\frac{2\Sigma}{1+2Ea^pb^q+\frac{2Ea^pb^q}{n}}<\Delta_3<\frac{2\Sigma}{1-2Ea^pb^q-\frac{2Ea^pb^q}{n}}$である。また，ｐ＝ｑならば$\Delta_3=2\Sigma$となる。こうして規則２は示された。

２）訳注１の⑨にも記したように，正しくは$m^2=\frac{n^3}{2pq}$である。プライス自身による誤りの指摘が「規則２の証明」論文の原注内でなされているが，そこでは「補遺」の中の同様の誤植にのみ触れられている。また上記⑨に言及しようとして「項目８」と誤記し，過ちを重ねてしまった（Price 1765, 324; Deming 1940, iii; Price 1983, 24n, 34n; Bernard 1958, 139）。訳注２３も参照のこと。

３）原注ⅱは本来この位置に挿入されるべきであった。『王立協会紀要』第 53 巻の巻末に掲載された正誤表（Dale 2003, 297 にも採録）を参照のこと。

なお，ここの〈比率〉をｈと置くと，$\log h=\frac{1}{12}\times\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)-\frac{1}{360}\times\left(\frac{1}{n^3}-\frac{1}{p^3}-\frac{1}{q^3}\right)+\cdots$より，$h=e^{\frac{1}{12}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)-\frac{1}{360}\left(\frac{1}{n^3}-\frac{1}{p^3}-\frac{1}{q^3}\right)+\cdots}$だから$Ea^pb^q=\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{Kpq}}\times h$である。Ｋは単位円（半径１）の四分円弧すなわち２π×（１／４）が半径に対して持つ比率なので，$K=\pi/2$より$Ea^pb^q=\frac{h\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi pq}}$となる。訳注６末尾を参照。

４）正味２頁のこの論考（Bayes 1764a）は「故トマス・ベイズ師のジョン・カントン宛書簡」と題して，「偶然論における一問題の解法」よりもひと月早い 1763 年 11 月 24 日に王立協会で読み上げられ，ともに翌年刊の『王立協会紀要』第 53 巻に収録された。プライスが述べている通り，ド・モアブルおよびシンプスンがスターリングの研究成果を盛り込んで立てた式をベイズは利用している。ド・モアブルとスターリングの関係については前編で触れたが（林 2021, 89），いわゆる「スターリングの定理」は，ｎを自然数とした場合のｎ！の値を$\sqrt{2\pi}\times n^{n+\frac{1}{2}}\times e^{-n}$で近似する（ラプラス 1997 の 205-6 頁に内井惣七による簡潔な解説あり）。自然対数で表記すれば$\log n!=\log 1$（＝０）$+\log 2+\log 3+\cdots+\log n\fallingdotseq\frac{1}{2}\log 2\pi$（$=\log\sqrt{2\pi}$）$+\left(n+\frac{1}{2}\right)\log n-n\times\log e$（＝１）となる。末尾のｎは本来，級数$n-\frac{1}{12n}+\frac{1}{360n^3}-\frac{1}{1260n^5}+\frac{1}{1680n^7}-\cdots$を表すが，ｎの値が十分大きければｎと見なしてよいとする。訳注５も参照されたい。

以上を受けて，上掲論考におけるベイズの主張を確認しておこう。１から大きな自然数ｚ（原注ⅱでプライスはｚをｘに改めた）までの各数の自然対数の総和$\log 2+\log 3+\cdots+\log z$は，$\frac{1}{2}\log c+\left(z+\frac{1}{2}\right)\times\log z$から級数$z-\frac{1}{12z}+\frac{1}{360z^3}-\frac{1}{1260z^5}+\frac{1}{1680z^7}-\frac{1}{1188z^9}+\cdots$を引き去った値に近似する（ｃ＝２π）。ただし級数第五項までの係数は次第に減少し，第六項以降のそれは次第に増加する。項が下るごとに分母にz^2が掛け合わせられていくが，ｚがいかに大きな数でも「やがてはｚの冪乗の増大で埋め合わせられる以上に大きな割合で係数が増大する」ようになるため（Bayes 1764a, 270），上記の級数は収束しない。以上がベイズの「証明」の骨子である。トドハンターによれば，ド・モアブルは級数が収束すると考えていた（トドハンター2017, 166）。ｚの値が十分大きければ近似式としての実用性は疑いないが，厳密に言えば，ベイズの批判のほうが正しいのである。

５）『偶然の性質と法則』補題３でシンプスンは，ｘを冪乗した諸項からなる級数でｘ！の値（Ｐ）を表す際に，各項の係数を求めている。シンプスン曰く，自然対数が$1-\frac{1}{12}+\frac{1}{360}\cdots$となる数（$e^{1-\frac{1}{12}+\frac{1}{360}\cdots}$）は「ドモアブル（Demoivre）氏がスターリング氏から見て取ったように，半径１の円周の平方根である 2.506…に等しい」から，「双曲［自然］対数

が１の数」すなわちネイピア数をｍと置き，単位円の周長をｃと置けば，「$x^{x+\frac{1}{2}}\times m^{-x}\times c^{\frac{1}{2}}$ ×（１＋$\frac{1}{12x}+\frac{1}{288x^2}-\frac{139}{51840x^3}\cdots$）＝Ｐを得る」（Simpson 1740, 75）。また，補題３の系が述べるように，ｘが「非常に大きな数」になれば$\frac{1}{12x}+\frac{1}{288x^2}-\frac{139}{51840x^3}\cdots$の値は無視し得るため，上式は$\left(\frac{x}{m}\right)^x\times x^{\frac{1}{2}}\times c^{\frac{1}{2}}\times 1=\left(\frac{x}{m}\right)^x\sqrt{cx}$で近似可能である（*Ibid.*）。これらの知見は訳注４で確認したスターリングの定理そのものと言える。$m^{\frac{1}{12x}-\frac{1}{360x^3}+\frac{1}{1260x^5}\cdots}$をマクローリン展開したものが$1+\frac{1}{12x}+\left(\frac{1}{12x}\right)^2\Big/2!+\left(\frac{1}{12x}\right)^3\Big/3!-\frac{1}{360x^3}+\cdots=1+\frac{1}{12x}+\frac{1}{288x^2}-\frac{139}{51840x^3}+\cdots$だから，上式を対数に改めた$\log P=\log x!=\left(x+\frac{1}{2}\right)\log x-x+\log\sqrt{2\pi}+\left(\frac{1}{12x}-\frac{1}{360x^3}+\frac{1}{1260x^5}\cdots\right)$にｘ＝１を代入すると，$0=\log\sqrt{2\pi}-\left(1-\frac{1}{12}+\frac{1}{360}-\frac{1}{1260}\cdots\right)$より$\log\sqrt{2\pi}=1-\frac{1}{12}+\frac{1}{360}-\frac{1}{1260}\cdots$である。先にシンプスンが述べた通り，この最後の等式については「敬愛すべき学殖豊かな友」に教わったと，ド・モアブルは『偶然論』で公言している（De Moivre 1756, 244; トドハンター2017, 166; 林 2021, 89）。

Ｐの値を算式で表すために，シンプスンは$\log P=(x-a)\log x+Ax+B+Cx^{-1}+Dx^{-2}+Ex^{-3}+\cdots$と置き，自身は「Ｌ：ｘ」や「Ｌ：Ｐ」などという見慣れない表記（それぞれ$\log x$と$\log P$を示す）を用いつつ，先行する補題２で示した冪乗和（$d^2+(2d)^n+(3d)^n+(4d)^n+(5d)^n+\cdots$）の導出方法も応用し，Ａ＝（正しくは－）１，$a=-\frac{1}{2}$，$C=\frac{1}{3\times4}$，Ｄ＝０，$E=-\frac{1}{3\times4\times5\times6}$，Ｆ＝０，$G=\frac{1}{5\times6\times6\times7}$，Ｈ＝０，$I=-\frac{1}{5\times6\times7\times8}$等々を弾き出す。Ｂについては，ｘ＝１のときＰ＝ｘ！とすれば$\log P=0$よりＢ＝$\log\sqrt{2\pi}$と求まる（Simpson 1740, 71-74）。この最後の点についてはすでに上述した通りである。

シンプスンによる以上の方法はごく端的にしか語られていないため，プライスが本文中で示している係数算出法との直接の対応関係ははっきりしない。そこで，以下では，Bayes 1764a（訳注４参照）においてベイズが採用している方法を紹介することをもってプライスの手法に対する解説に代えたい。

ベイズによれば，$a=\frac{1}{12}$と定めると，右の表に示したような一定の規則のもとでｂ以降の値が求まる。$b=\frac{77a^2}{385}=\frac{1}{720}$，$c=\frac{22a^3}{385}=\frac{1}{30240}$，$d=\frac{6.6a^4}{385}=\frac{1}{1209600}$等々である。このときＡ＝ａを措くと，Ｂ＝２！×ｂ，Ｃ＝４！×ｃ，Ｄ＝６！×ｄ，Ｅ＝８！×ｅ，Ｆ＝１０！×ｆ，Ｇ＝１２！×ｇのような規則性を伴って各係数が決定される。$B=2\times\frac{1}{720}=\frac{1}{360}$，

表

５ｂ	＝	１ａａ					
７ｃ	＝	２ｂａ					
９ｄ	＝	２ｃａ	＋	１ｂｂ			
１１ｅ	＝	２ｄａ	＋	２ｃｂ			
１３ｆ	＝	２ｅａ	＋	２ｄｂ	＋	１ｃｃ	
１５ｇ	＝	２ｆａ	＋	２ｅｂ	＋	２ｄｃ	

Ｃ＝２４×$\frac{1}{30240}$＝$\frac{1}{1260}$，以下同様である（Bayes 1764a, 270）。若き日のＷ・Ｅ・デミングがこのベイズの論考に付した注釈の通り（Deming 1940, xv），ベイズが求めたこれらの係数は，ベルヌーイ数を特定の連続する自然数の積で除したものの絶対値である。ベルヌーイ数に伴う正負の符号を反映させると，Ａ＝$\frac{1}{12}=\frac{B_2}{1\times2}$，Ｂ＝$-\frac{1}{360}=\frac{B_4}{3\times4}$，Ｃ＝$\frac{1}{1260}=\frac{B_6}{5\times6}$，Ｄ＝$-\frac{1}{1680}=\frac{B_8}{7\times8}$，Ｅ＝$\frac{1}{1188}=\frac{B_{10}}{9\times10}$等々となる。シンプスンが用いた記号法だと，ここのＡはＣ，ＢはＥ，ＣはＧ，などである点に注意されたい。シンプスンに倣ったと述べているにもかかわらず，プライスの記号法は明らかにベイズに従っている。

なお，プライスによる係数導出の過程で二項係数が出現するのはベルヌーイ数の性質による（トドハンター2017, 82-84 の訳注を参照）。例えば$B_{10}=-\frac{1}{11}(B_0+11B_1+55B_2+330B_4+462B_6+165B_8)$の六つの係数は，$(a+b)^{p+q}$を展開した級数の各項総和において$p+q=11$としたときの二項係数$\binom{11}{p}$から導出できる。先述の通り$B_2=2A$，$B_4=12B$，$B_6=30C$，$B_8=56D$として，$B_{10}=90E=-\frac{1}{11}+\frac{1}{2}-(10A+360B+1260C+840D)$と整理できるので，$E=\frac{1}{220}-\frac{A+36B+126C+84D}{9}$と分かる。ここでも上記同様$\binom{9}{p}$から四つの二項係数を導き出せる。

６）プライスは訳注２で紹介したのと同じ手段，すなわち「規則２の証明」論文の原注で言及するかたちで，$\frac{Hn}{n+1}\times\cdots$の級数の第四項の符号を正から負へと訂正した（Price 1765, 325; Deming 1940, iii; Price 1983, 26n）。この級数中のＨについては，訳注３で示したｈに$p=q=\frac{n}{2}$（ただし$n=p+q$）を代入してｈとＨの関係を自然対数で表現すると，$\log H=\log\frac{1}{h}=-\log e^{\frac{1}{12}\left(\frac{1-2^2}{n}\right)-\frac{1}{360}\left(\frac{1-2\times2^3}{n^3}\right)+\frac{1}{1260}\left(\frac{1-2\times2^5}{n^5}\right)-\cdots}=\frac{2^2-1}{12n}-\frac{2^4-1}{360n^3}+\frac{2^6-1}{1260n^5}-\cdots$となる（安藤1976, 51）。したがって本文中の$\frac{2^2-1}{2n}$は誤りで，分母の係数は２ではなく１２が正しい（Dale 2003, 297）。この点は「規則２の証明」では訂正されている（Price 1765, 316）。

なお，「規則２の証明」論文の後半は，前半（訳注１参照）でその成り立ちを詳細に解説済みの規則２の，さらなる精度向上のために費やされている。この企図を受けて，前半の項目番号に後続するように⑬～㉘の計１６項目が設けられた。プライスによると，前半はベイズの遺したメモを彼が「書き起こした（transcribe）」ものに過ぎないが，後半については「求められている偶然を十分狭小な範囲内に収める」ためにプライス自身が追加的に試みた証明だという（*Ibid.*, 310）。以下，「規則２の証明」後半を前半と同じく項目ごとに見ておきたい。訳注１同様，プライスが端折っている説明を筆者の責任でかなり補っていること，時に修正も施していることを，最初に断っておく。

⑬上掲⑦（訳注１参照）をふまえると$f_1'(z)／f_3'(z)=\left(1-\frac{n^2z^2}{pq}\right)^{\frac{n}{2}-1}／\left(1+\frac{nz}{p}\right)^{p-1}\left(1-\frac{nz}{q}\right)^{q-1}$（$-\frac{n^3}{pq}z\dot{z}$は相殺される）であり，同様に$f_2'(z)／f_1'(z)=\left(1-\frac{nz}{p}\right)^{p-1}\left(1+\frac{nz}{q}\right)^{q-1}／\left(1-\frac{n^2z^2}{pq}\right)^{\frac{n}{2}-1}$である。

⑭デイルに倣い（Dale 2003, 359），$f_1'(z)/f_3'(z)$ の自然対数を $g_1(z)$，$f_2'(z)/f_1'(z)$ の自然対数を $g_2(z)$ と置く。$g_1(z)=(\frac{n}{2}-1)\times\log\left(1-\frac{n^2z^2}{pq}\right)-(p-1)\times\log\left(1+\frac{nz}{p}\right)-(q-1)\times\log\left(1-\frac{nz}{q}\right)$ だから，マクローリン展開すると $(\frac{n}{2}-1)(-\frac{n^2z^2}{pq}-\frac{n^4z^4}{2p^2q^2}+\cdots)-(p-1)(\frac{nz}{p}-\frac{n^2z^2}{2p^2}+\frac{n^3z^3}{3p^3}-\frac{n^4z^4}{4p^4}+\cdots)-(q-1)(-\frac{nz}{q}-\frac{n^2z^2}{2q^2}-\frac{n^3z^3}{3q^3}-\frac{n^4z^4}{4q^4}-\cdots)$ となる。z の次数が等しい項ごとにまとめて加減していくと，$(-p\times\frac{nz}{p}+\frac{nz}{p}+q\times\frac{nz}{q}-\frac{nz}{q})+\{\frac{n}{2}\times(-\frac{n^2z^2}{pq})+\frac{n^2z^2}{pq}+p\times\frac{n^2z^2}{2p^2}-\frac{n^2z^2}{2p^2}+q\times\frac{n^2z^2}{2q^2}-\frac{n^2z^2}{2q^2}\}+\{(-p)\times\frac{n^3z^3}{3p^3}+\frac{n^3z^3}{3p^3}+q\times\frac{n^3z^3}{3q^3}-\frac{n^3z^3}{3q^3}\}+\{\frac{n}{2}\times(-\frac{n^4z^4}{2p^2q^2})+\frac{n^4z^4}{2p^2q^2}+p\times\frac{n^4z^4}{4p^4}-\frac{n^4z^4}{4p^4}+q\times\frac{n^4z^4}{4q^4}-\frac{n^4z^4}{4q^4}\}+\cdots=(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})\times nz+(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-\frac{1}{p^2}-\frac{1}{q^2}-\frac{n-2}{pq})\times\frac{n^2z^2}{2}+(-\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{p^3}-\frac{1}{q^3})\times\frac{n^3z^3}{3}+(\frac{1}{p^3}+\frac{1}{q^3}-\frac{1}{p^4}-\frac{1}{q^4}-\frac{n-2}{p^2q^2})\times\frac{n^4z^4}{4}+\cdots=(\frac{q-1}{q}-\frac{p-1}{p})\,nz+(\frac{q-1}{q^2}+\frac{p-1}{p^2}-\frac{n-2}{pq})\,\frac{n^2z^2}{2}+(\frac{q-1}{q^3}-\frac{p-1}{p^3})\,\frac{n^3z^3}{3}+(\frac{q-1}{q^4}+\frac{p-1}{p^4}-\frac{n-2}{p^2q^2})\,\frac{n^4z^4}{4}+\cdots$ である。同様に $g_2(z)=(p-1)\times\log\left(1-\frac{nz}{p}\right)+(q-1)\times\log\left(1+\frac{nz}{q}\right)-(\frac{n}{2}-1)\times\log\left(1-\frac{n^2z^2}{pq}\right)$ だから，マクローリン展開して整理すると $(\frac{q-1}{q}-\frac{p-1}{p})\,nz-(\frac{q-1}{q^2}+\frac{p-1}{p^2}-\frac{n-2}{pq})\,\frac{n^2z^2}{2}+(\frac{q-1}{q^3}-\frac{p-1}{p^3})\,\frac{n^3z^3}{3}-(\frac{q-1}{q^4}+\frac{p-1}{p^4}-\frac{n-2}{p^2q^2})\,\frac{n^4z^4}{4}+\cdots$ である。$0\leqq z\leqq\frac{\sqrt{pq}}{n}$ かつ $q>p$（ただし p q ともに自然数とすれば，$p\geqq 3$，$q\geqq 4$）をつねに仮定すると，$z=0$ のときは $g_1(z)$ および $g_2(z)$ は当然０，z が小さいうちは正の値を取り，z の増大につれて増加して最大値に至り，その後は０に至るまで減少を続けて，やがて負の値を取る。これが両級数に共通した挙動である。なお，のちに⑱で確認するように，$g_1(z)$ および $g_2(z)$ に最大値をもたらす z の値は $\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n^3-n^2}}$ である。したがって $f_1'(z)/f_3'(z)$ ならびに $f_2'(z)/f_1'(z)$ も，$\log 1=0$ だから初めは１で，その後１より大きくなり，増加を続けて最大値に至った後は減少を始め，ついには１より小さくなると分かる。

⑮上掲⑭を前提として $g_1(z)$ の挙動について見ると，$\frac{q-1}{q}-\frac{p-1}{p}$ はつねに０より大きいので第一項は正，また $(\frac{q-1}{q^2}+\frac{p-1}{p^2}-\frac{n-2}{pq})<0$ かつ $(\frac{q-1}{q^3}-\frac{p-1}{p^3})<0$ より第二項と第三項は負，第四項以降は正負が交互に来る（第四項は正）。続いて $g_2(z)$ の挙動について見ると，$-(\frac{q-1}{q^2}+\frac{p-1}{p^2}-\frac{n-2}{pq})>0$ より初めの二項はつねに正，第三項以降はつねに負である。z が小さい場合には初めの二項が級数の値に大きく作用し，$g_1(z)$ の値を $g_2(z)$ の値よりも押し下げるが，両級数の第二項および第四項の絶対値を等しくするところまで z が増大すると（例えば $p=3$，$q=4$ のとき，第二項の係数の絶対値は $\frac{49}{288}$，第四項のそれは $\frac{84035}{82944}$ だから，$z^4\times\frac{1715}{288}=z^2$ を満たす z の値は $\frac{12\sqrt{2}}{7\sqrt{35}}$ で，これは

$\frac{\sqrt{pq}}{n}=\frac{2\sqrt{3}}{7}$を下回る)，$g_1(z)\fallingdotseq g_2(z)$が成立する。$z$の増大につれてまず$g_2(z)$，続いて$g_1(z)$が減少に入り（上の例を用いると，$z=\frac{12\sqrt{2}}{7\sqrt{35}}$は上掲⑭で見た最大値を両級数にもたらす$z=\frac{12}{\sqrt{7^3-7^2}}=\frac{\sqrt{2}}{7}$より大きいため，$g_1(z)\fallingdotseq g_2(z)$が成り立つ以前に両級数の減少は始まっている)，$g_2(z)$が初めに０になり，遅れて$g_1(z)$が０になる。以後は両者ともに負の値のままである。したがってzの値を０から徐々に大きくしていくとき，$f_1'(z)／f_3'(z)$は初め$f_2'(z)／f_1'(z)$よりも小さく，互いの最大値を過ぎてしばらくした辺りで，両比率は等しくなると言える。

⑯$f_1'(z)／f_3'(z)$は，訳注１の項目⑦と⑧で見た$Qt=a^pb^q\left(1-\frac{n^2z^2}{pq}\right)^{\frac{n}{2}}$および$Ft=(a+z)^p(b-z)^q=a^pb^q\times\left(\frac{a+z}{a}\right)^p\left(\frac{a-z}{b}\right)^q=a^pb^q\left(1+\frac{nz}{p}\right)^p\left(1-\frac{nz}{q}\right)^q$それぞれの流率$Qt'(z)$と$Ft'(z)$との間の比率に対応する。同様に$f_2'(z)／f_1'(z)$は$Cf=(a-z)^p(b+z)^q$と$Qt$それぞれの流率$Cf'(z)$と$Qt'(z)$の比率に対応する。すなわち，分子と分母に共通して掛かるa^pb^qが相殺するので$\left(1-\frac{nz}{p}\right)^{p-1}\left(1+\frac{nz}{q}\right)^{q-1}／\left(1-\frac{n^2z^2}{pq}\right)^{\frac{n}{2}-1}$のままである。訳注１で示した図を参照すると，ＡＨ上のｈを起点とするzの増加につれて，Ｒｈから発したQtは面積ＲＱＷｈを，Ｄｈから発したFtとCfはそれぞれ面積ＨＤｈとＡＤｈを描くことが確認できる。このとき，Qt，Ft，Cfの長さはzの増加に伴って減少する。そして上掲⑭および⑮をふまえれば，$f_2'(z)／f_1'(z)$に対応する$Cf'(z)／Qt'(z)$と，$f_1'(z)／f_3'(z)$に対応する$Qt'(z)／Ft'(z)$の関係は，$Cf'(z)／Qt'(z)>1$，$Qt'(z)／Ft'(z)>1$（流率はすべて負の値を取るためそれらの比は正の値）かつ前者の比率＞後者の比率が続くかぎり，CfはQtよりも速くかつ大きく減少し，QtはFtよりも速くかつ大きく減少するというものになる（$Ft'(z)>Qt'(z)>Cf'(z)$)。さらにzを大きくしていくと，初めに前者の比率が，続いて後者の比率が１に等しくなり，その後は両者ともに１より小さくなるが，このとき$Ft'(z)<Qt'(z)<Cf'(z)$が成立する。

⑰曲線ＤＦＨ，ＲＱＷ，ＤＣＡは同じ「反曲点（contrary flexure)」(Price 1765, 314）ないし変曲点を持つ。zによる二階微分が０になる点がそれである。試みに曲線ＲＱＷこと$Qt=a^pb^q\left(1-\frac{n^2z^2}{pq}\right)^{\frac{n}{2}}$を二階微分してみると，$Qt'(z)=a^pb^q\left(-\frac{n^3z}{pq}\right)\left(1-\frac{n^2z^2}{pq}\right)^{\frac{n}{2}-1}$より$Qt''(z)=a^pb^q\times\left\{-\frac{n^3}{pq}\left(1-\frac{n^2z^2}{pq}\right)^{\frac{n}{2}-1}+\left(\frac{n^6z^2}{p^2q^2}-2\frac{n^5z^2}{p^2q^2}\right)\left(1-\frac{n^2z^2}{pq}\right)^{\frac{n}{2}-2}\right\}=a^pb^q\times\left(\frac{(n^6-n^5)z^2}{p^2q^2}-\frac{n^3}{pq}\right)\times\left(1-\frac{n^2z^2}{pq}\right)^{\frac{n}{2}-2}$で，この式の示す値が０になる条件は$\frac{(n^6-n^5)z^2}{p^2q^2}-\frac{n^3}{pq}=0$，および$1-\frac{n^2z^2}{pq}=0$である。後者は$z^2=\frac{pq}{n^2}$より$z=\frac{\sqrt{pq}}{n}$であり，$Qt=0$の場合，すなわち変曲点が図の点Ｈ（Ｗ）と重なる場合を示す。それは上掲⑭に示したzの上限値に相当する。また前者は$z^2=\frac{n^3pq}{n^6-n^5}$より$z=\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{(n^6-n^5)/n^3}}=\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n^3-n^2}}$で，$z$がこの値のとき三曲線は揃って変曲する。

⑱Ｑｔ’（ｚ）／Ｆｔ’（ｚ）とＣｆ’（ｚ）／Ｑｔ’（ｚ）はともにｚ＝$\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n^3-n^2}}$のとき最大値を取る。これは$g_1$（ｚ）および$g_2$（ｚ）の流率すなわち増減率が０となるときに対応する。上掲⑭で見た通り，$g_1(z)=(\frac{n}{2}-1)\times\log\left(1-\frac{n^2z^2}{pq}\right)-(p-1)\times\log\left(1+\frac{nz}{p}\right)-(q-1)\times\log\left(1-\frac{nz}{q}\right)$，$g_2(z)=(p-1)\times\log\left(1-\frac{nz}{p}\right)+(q-1)\times\log\left(1+\frac{nz}{q}\right)-(\frac{n}{2}-1)\times\log\left(1-\frac{n^2z^2}{pq}\right)$だから，対数微分により$g_1'(z)=\frac{2nz-n^2z}{pq-n^2z^2}-\frac{p-1}{p+nz}+\frac{q-1}{q-nz}=0$および$g_2'(z)=-\left(\frac{2nz-n^2z}{pq-n^2z^2}+\frac{p-1}{p-nz}-\frac{q-1}{q+nz}\right)=0$より$\frac{p-1}{p+nz}-\frac{q-1}{q+nz}=\frac{q-1}{q-nz}-\frac{p-1}{p-nz}$と整理できる。試みにｐ＝３，ｑ＝４，ｎ＝７を代入して計算すると$\frac{-1-7z}{(3+7z)(4+7z)}=\frac{1-7z}{(4-7z)(3-7z)}$だから$z^2=\frac{12}{294}$，したがって$z=\frac{3\times4}{\sqrt{7^3-7^2}}=\frac{\sqrt{2}}{7}$と求まる。

⑲変曲点ではＣｆ’（ｚ）／Ｑｔ’（ｚ）とＱｔ’（ｚ）／Ｆｔ’（ｚ）との差が最大になることを確認する。これについては，前者に対応する$f_2'(z)/f_1'(z)$を後者に対応する$f_1'(z)/f_3'(z)$で割った$\left(1-\frac{n^2z^2}{p^2}\right)^{p-1}\left(1-\frac{n^2z^2}{q^2}\right)^{q-1}\Big/\left(1-\frac{n^2z^2}{pq}\right)^{2\left(\frac{n}{2}-1\right)}$の流率を０にするｚの値が同じく$\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n^3-n^2}}$になることが分かればよい。上掲⑱と同様に対数を取ると$(p-1)\times\log\left(1-\frac{n^2z^2}{p^2}\right)+(q-1)\times\log\left(1-\frac{n^2z^2}{q^2}\right)-(n-2)\times\log\left(1-\frac{n^2z^2}{pq}\right)$で，微分すると$\frac{2n^2(n-2)z}{pq-n^2z^2}-\frac{2n^2(p-1)z}{p^2-n^2z^2}-\frac{2n^2(q-1)z}{q^2-n^2z^2}$となるから，これが０に等しいと置く。ｐ＝３，ｑ＝４，ｎ＝７を代入すると，$\frac{490z}{12-49z^2}-\frac{196z}{9-49z^2}-\frac{294z}{16-49z^2}=0$より（煩雑になるが計算して）$32928z-331338z^3=31752z-302526z^3$を導けば$z^2=\frac{1176}{28812}$，したがって$z=\frac{\sqrt{2}}{7}$を導出できる。

⑳以上で見た曲線ＲＱＷの形状をもとに，変曲点からＡＨに向けて引いた垂線とＲｈに挟まれた面積ＲｈｔＱと，ＲＱＷｈとの関係を考察する。項目⑪（訳注１参照）より$RhtQ/RQWh=\frac{n+1}{\sqrt{n}}\times\frac{\sqrt{2}}{2^n}\times G\times(mz-\frac{m^3z^3}{3}+\cdots)$だから，括弧内の級数の各項に掛かるｍｚを外に出し，$m=\frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{2pq}}$（項目⑨参照）と$z=\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n^3-n^2}}$，既出のＨとＫをふまえて$G=\frac{2^n}{H\sqrt{nK}}$を代入すれば，ＲｈｔＱのＲＱＷｈに対する比率は$\frac{n+1}{\sqrt{n}}\times\frac{\sqrt{2}}{2^n}\times\frac{2^n\sqrt{2}}{H\sqrt{n\pi}}\times\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2(n-1)}}\times(1-\frac{m^2z^2}{3}+\frac{(n-2)m^4z^4}{10n}-\frac{(n-2)(n-4)m^6z^6}{42n^2}+\cdots)=\frac{n+1}{\sqrt{n(n-1)}}\times\frac{\sqrt{2}}{H\sqrt{\pi}}\times(1-\frac{n}{6(n-1)}+\frac{n(n-2)}{40(n-1)^2}-\frac{n(n-2)(n-4)}{336(n-1)^3}+\cdots)$となる。ここで$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\fallingdotseq 0.79788$である。

Ｇ値の根拠については，証明があまりに「面倒」だからと言う理由でプライス自身は説明しないが（*Ibid.*, 315），訳注１に示した項目⑩でＧを$\frac{n}{2}$番目の項（中間項）の係数と

定義しているので，本訳注冒頭でｈからＨ＝$e^{\frac{3}{12n}-\frac{15}{360n^3}+\frac{63}{1260n^5}-\cdots}$を求めたようにｐ＝ｑ＝$\frac{n}{2}$を二項定理の式に代入してＧ＝$\frac{n!}{\frac{n}{2}!\times\frac{n}{2}!}$を考えればよい。訳注５でシンプスンを引きながら示したスターリングの定理ｎ！＝$n^{n+\frac{1}{2}}\times e^{-n}\times\sqrt{2\pi}\times e^{\frac{1}{12n}-\frac{1}{360n^3}+\frac{1}{1260n^5}-\cdots}$（ただしｘをｎに，ｍをｅに，ｃを２πに置換した）を用いるとＧ＝$\frac{n^{\frac{n}{2}}\times e^{-n}\times\sqrt{2\pi}\times e^{\frac{1}{12n}-\frac{1}{360n^3}+\frac{1}{1260n^5}-\cdots}}{\left\{\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n+1}{2}}\times e^{-\frac{n}{2}}\times\sqrt{2\pi}\times e^{\frac{2}{12n}-\frac{8}{360n^3}+\frac{32}{1260n^5}-\cdots}\right\}^2}=\frac{n^{n+\frac{1}{2}}\times e^{\frac{1}{12n}-\frac{1}{360n^3}+\frac{1}{1260n^5}-\cdots}}{\left(\frac{n}{2}\right)^{n+1}\times\sqrt{2\pi}\times e^{\frac{4}{12n}-\frac{16}{360n^3}+\frac{64}{1260n^5}-\cdots}}$だから，いったん対数にして $\log G$＝（ｎ＋$\frac{1}{2}$）$\log n$＋（$\frac{1}{12n}$－…）－（ｎ＋１）$\log\frac{n}{2}$－$\log\sqrt{2\pi}$－（$\frac{4}{12n}$－…）＝$\log 2^{n+1}$－$\log\sqrt{2\pi n}$－（$\frac{3}{12n}$－$\frac{15}{360n^3}$＋$\frac{63}{1260n^5}$－…），元に返せばＧ＝$\frac{2^{n+1}}{\sqrt{2\pi n}\times e^{\frac{3}{12n}-\frac{15}{360n^3}+\frac{63}{1260n^5}-\cdots}}=\frac{2^{n+1}\times{}^1/_2}{\sqrt{\left({}^1/_2\right)^2 2\pi n}\times e^{\frac{3}{12n}-\frac{15}{360n^3}+\frac{63}{1260n^5}-\cdots}}=\frac{2^n}{\sqrt{Kn}\times H}$である（Ｋ＝$\frac{\pi}{2}$）。この解法は，「二項級数の特定の項が限りなく冪乗された際に，級数全体に対して持つ比率を見出す」と題されたシンプスン『偶然の性質と法則』補題５に，上式における括弧内の級数を省略した$\frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n\times\sqrt{2\pi n}}{\left(\frac{q}{e}\right)^q\times\sqrt{2\pi q}\times\left(\frac{p}{e}\right)^p\times\sqrt{2\pi p}}=\frac{\frac{n^n}{e^n}\times\sqrt{2\pi}\times n^{\frac{1}{2}}}{\frac{q^q p^p}{e^n}\times\sqrt{2\pi}\times\sqrt{2\pi pq}}=\frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{p^p q^q\sqrt{2\pi pq}}$のかたちで明示されている（ｍとｃの他，ｒをｑ，ｓをｐに置き換えた。省略可能な理由については訳注５を見られたい）。二項級数を（ａ＋ｂ）^{n}と置くと，上記係数の分子に$a^p b^q$，分母に（ａ＋ｂ）^{n}を掛ければ，求めるべき「比率」が分かる。ちなみに補題５の系で述べられている通り，ａとｂが等値であれば中間項こそが最大項となるので，先の場合と同じくｐとｑに$\frac{n}{2}$を代入して計算すると，級数展開した諸項総和と最大項との比率は$\frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{\left(\frac{n}{2}\right)^{n+1}\times\sqrt{2\pi}}\times\frac{a^n}{(2a)^n}=\frac{2^{n+1}}{\sqrt{2\pi n}}\times\frac{1}{2^n}=\frac{2}{\sqrt{2\pi n}}$と求まる（Simpson 1740, 76-77）。２π＝ｃより，これはド・モアブル著『偶然論』において（１＋１）^{n}を展開した級数の諸項総和で中間項を割った比率として提示されていたものと同じである（林 2021 の訳注１参照）。ａ＝ｂ＝１でなくとも，この比率はａ＝ｂでありさえすればつねに成り立つと判明した。

ＲｈｔＱ／ＲＱＷｈを表す式に話を戻そう。例えばｎ＝６であれば，同式の括弧内の級数の第五項以降が消え，またＨ＝$e^{\frac{3}{12\times6}-\frac{15}{360\times6^3}+\frac{63}{1260\times6^5}-\cdots}$≒１．０４２３５より，ＲｈｔＱ／ＲＱＷｈ＝$\frac{7}{\sqrt{30}}\times\frac{0.79788}{1.04235}\times\frac{144}{175}$≒０．８０４９８と分かる。ｎの値をより大きく取れば，この比率は０．６８２２に限りなく接近していくという。また，上掲⑭および⑮で確認

したg_1（ｚ）≒g_2（ｚ）を成立させるｚ（＞$\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n^3-n^2}}$）において，同様にｎを十分大きくするならば，ＲｈｔＱ／ＲＱＷｈの値は限りなく０．８４２６に近づくという。このｚは上掲⑮より－（$\frac{q-1}{q^2}$＋$\frac{p-1}{p^2}$－$\frac{n-2}{pq}$）$\frac{n^2z^2}{2}$＝（$\frac{q-1}{q^4}$＋$\frac{p-1}{p^4}$－$\frac{n-2}{p^2q^2}$）$\frac{n^4z^4}{4}$を満たす。したがってｚ^2＝$\frac{2}{n^2}$×（－$\frac{4pq-n^2}{p^2q^2}$）×$\frac{p^4q^4}{pqn^3+4pqn^2-4p^2q^2n-n^4}$＝$\frac{-2(p-q)^2p^2q^2}{n^6-4pqn^4-pq(p-q)^2n^3}$となり，分子と分母を－（ｐ－ｑ）^{2}で割って整理するとｚ^2＝$\frac{2p^2q^2}{n^3pq-n^4}$＝$\frac{2p^2q^2}{n^3(pq-n)}$，よってｚ＝$\sqrt{\frac{2pq\left(p/n\right)\left(q/n\right)}{n(pq-n)}}$と分かる（Dale 2003, 362)。ＲｈｔＱ／ＲＱＷｈを表す先の式にこのｚを代入すると，括弧内の級数は訳注１の項目⑨も改めてふまえて（１－$\frac{1}{3(pq-n)}$＋$\frac{n-2}{10n(pq-n)^2}$－$\frac{(n-2)(n-4)}{42n^2(pq-n)^3}$＋$\frac{(n-2)(n-4)(n-6)}{216n^3(pq-n)^4}$－…）となるから，試みにｐ＝３，ｑ＝５，ｎ＝８を代入すると括弧内の第六項以降が消え，またＨ≒１．０３１６６より，ＲｈｔＱ／ＲＱＷｈ＝$\frac{9}{\sqrt{56}}$×$\frac{0.79788}{1.03166}$×$\frac{5276804}{5531904}$≒０．８８７２５と計算できる。ｎ＝８が小さな値であるため，計算結果が０．８４２６から離れていると言える。

㉑移動する垂線Ｆｔ，Ｑｔ，Ｃｆが描く面積を比較すると，（ＤｈｔＦ－ＲｈｔＱ）＜（ＲｈｔＱ－ＤｈｆＣ）より２×ＲｈｔＱ＞ＤｈｔＦ＋ＤｈｆＣ，したがってＲｈｔＱの値はＤｈｔＦとＤｈｆＣを２で割った平均値よりも大きい。すでに確認したように，初めはＣｆ’（ｚ）＜Ｑｔ’（ｚ）＜Ｆｔ’（ｚ）だから，面積ＤｈｆＣが最も拡張しにくく，逆にＤｈｔＦは拡張しやすい。しかし変曲点を過ぎてＣｆ’（ｚ）／Ｑｔ’（ｚ）＝Ｑｔ’（ｚ）／Ｆｔ’（ｚ）が成立したのちは，ＣｆよりもＱｔが，ＱｔよりもＦｔが大きく減少し始める（上掲⑯）。よって各面積の拡張率に変調が生じるが，上掲⑳でＲｈｔＱを例に検証した通り，この時点ですでに各面積の８割以上は各垂線によって描かれているため，それが決め手となって，上記の命題はほぼ維持される（Hald 1990 はこの点の誤りを指摘するが，ここではプライスの立論に従う）（Hald 1990, 152; Dale 2003, 366）。つまりｚ＝$\frac{\sqrt{pq}}{n}$となるまで，換言すればＱｔ＝$a^pb^q\left(1-\frac{n^2z^2}{pq}\right)^{\frac{n}{2}}$＝０になるまでＲｈｔＱが最大限に拡張しても，ＲＱＷｈ＝$\frac{HDh+ADh}{2}\left(\frac{ACFH}{2}\right)$×ｈ×Ｈと述べて大差ないという。本訳注６冒頭で見た通りｈ$^{-1}$＝Ｈだからｈ×Ｈ＝１である。ただしｎを十分大きな値にしなければならず，この条件を外すと狂いが生じる。

㉒訳注１の項目⑫より$\frac{DhtF}{DhfC}$＜$\frac{1+2Ea^pb^q+\frac{2Ea^pb^q}{n}}{1-2Ea^pb^q-\frac{2Ea^pb^q}{n}}$である。上掲㉑よりＲｈｔＱ＞$\frac{DhtF+DhfC}{2}$である。さらに$\frac{\left(1+2Ea^pb^q+\frac{2Ea^pb^q}{n}\right)+\left(1-2Ea^pb^q-\frac{2Ea^pb^q}{n}\right)}{2}$＝１である。$1+2Ea^pb^q+\frac{2Ea^pb^q}{n}$をＡ，$1-2Ea^pb^q-\frac{2Ea^pb^q}{n}$をＢと置く。$\frac{DhtF}{DhfC}$＜$\frac{A}{B}$よりＢ×ＤｈｔＦ＜Ａ×ＤｈｆＣであり，両辺を２で割るとＢ×$\frac{DhtF}{2}$＜Ａ×$\frac{DhfC}{2}$で，$\frac{DhfC}{2}$＜ＲｈｔＱ－$\frac{DhtF}{2}$だからＢ×$\frac{DhtF}{2}$＜Ａ×（ＲｈｔＱ－

$\frac{DhtF}{2}$）である。$\frac{B}{A}$＜（ＲｈｔＱ－$\frac{DhtF}{2}$）×$\frac{2}{DhtF}$より，$\frac{B}{A}$＋１＜$\frac{RhtQ}{DhtF}$×２だから$\frac{DhtF}{RhtQ}$＜$\frac{2A}{A+B}$となる。Ａ＋Ｂ＝２よりＤｈｔＦ／ＲｈｔＱ＜Ａと分かる。

㉓訳注１の項目⑧で定義されているようにＤｈｔＦ＞ＲｈｔＱだから$\frac{DhtF}{ACFH}$＞$\frac{RhtQ}{ACFH}$である。また項目⑫で示されている通り$\frac{RhtQ}{ACFH}$＝Σである。上掲㉒より$\frac{DhtF}{RhtQ}$＜$1+2Ea^pb^q+\frac{2Ea^pb^q}{n}$だから，Σ＜$\frac{DhtF}{ACFH}$（＝複比$\frac{RhtQ}{ACFH}$×$\frac{DhtF}{RhtQ}$＝Σ×$\frac{DhtF}{RhtQ}$）＜Σ×（$1+2Ea^pb^q+\frac{2Ea^pb^q}{n}$）となることは明らかである。

㉔訳注１の項目⑫のすぐ後の箇所ですでに見た通り，Δ_3＝$\frac{DhtF+DhfC}{ACFH}$が表す比率は，ｎ回の試行において出来事がｐ回起きｑ回起きなかった場合の，その出来事が次の一回の試行において起こる確率が$\frac{p}{n}$＋ｚと$\frac{p}{n}$－ｚの間のどこかにある確率を示す。$\frac{DhtF+DhfC}{ACFH}$＞$\frac{2\Sigma}{1+2Ea^pb^q+\frac{2Ea^pb^q}{n}}$は⑫の直後に示した通りである。ここで上掲㉑を参照すると，２×ＲｈｔＱ＞ＤｈｔＦ＋ＤｈｆＣより，当然ながら$\frac{2RhtQ}{ACFH}$＝２Σ＞$\frac{DhtF+DhfC}{ACFH}$となる。したがって$\frac{2\Sigma}{1+2Ea^pb^q+\frac{2Ea^pb^q}{n}}$＜$\Delta_3$＜２Σと判明した。２Σの値は⑫の後に示した$\frac{2\Sigma}{1-2Ea^pb^q-\frac{2Ea^pb^q}{n}}$より小さいため，$\Delta_3$の範囲をさらに狭めることで精度を上げ，規則２を「改良」できたと言える（Price 1765, 320）。

㉕ｃとｄが任意の分数二つを表すとき，ｃ×Ｆｔの流率＞ｄ×Ｃｆの流率という条件が満たされればｃ×Ｆｔ＋ｄ×Ｃｆ＞Ｑｔとなる理由を説明する。訳注１の項目⑦より$f_3(z)/f_1(z)=\{f_3'(z)\times(1+\frac{nz}{p})(1-\frac{nz}{q})\}/\{f_1'(z)\times(1-\frac{n^2z^2}{pq})\}$，また$f_2(z)/f_1(z)=\{f_2'(z)\times(1-\frac{nz}{p})(1+\frac{nz}{q})\}/\{f_1'(z)\times(1-\frac{n^2z^2}{pq})\}$である。上掲⑯より$f_3(z)/f_1(z)$はＦｔ（ｚ）／Ｑｔ（ｚ）に，$f_2(z)/f_1(z)$はＣｆ（ｚ）／Ｑｔ（ｚ）に置き換え可能なので，上の二式は$Ft'(z)\times(1+\frac{nz}{p})(1-\frac{nz}{q})=\frac{Ft}{Qt}\times Qt'(z)\times(1-\frac{n^2z^2}{pq})$ならびに$Cf'(z)\times(1-\frac{nz}{p})(1+\frac{nz}{q})=\frac{Cf}{Qt}\times Qt'(z)\times(1-\frac{n^2z^2}{pq})$となり，二式を足し合わせると$\{Ft'(z)\times(1+\frac{nz}{p})(1-\frac{nz}{q})+Cf'(z)\times(1-\frac{nz}{p})(1+\frac{nz}{q})\}/\{Qt'(z)\times(1-\frac{n^2z^2}{pq})\}=\frac{Ft+Cf}{Qt}$であるが，ここでＦｔ（ｚ）をｃ×Ｆｔ（ｚ）に，Ｃｆをｄ×Ｃｆ（ｚ）に置き換えても，両者の流率がそれぞれｃ倍およびｄ倍されるだけなので，同様の等式が成り立つ。ｑ＞ｐだから$(1+\frac{nz}{p})(1-\frac{nz}{q})>(1-\frac{nz}{p})(1+\frac{nz}{q})$であること，また$(1+\frac{nz}{p})(1-\frac{nz}{q})$と$(1-\frac{nz}{p})(1+\frac{nz}{q})$の平均値が$(1-\frac{n^2z^2}{pq})$であることを確認すれば，必ず$(1+\frac{nz}{p})(1-\frac{nz}{q})>(1-\frac{n^2z^2}{pq})>(1-\frac{nz}{p})(1+\frac{nz}{q})$と分かる。このとき条件よりｃ×Ｆｔ’（ｚ）＞ｄ×Ｃｆ’（ｚ）

であれば｛ｃ×Ｆｔ’（ｚ）×$(1+\frac{nz}{p})(1-\frac{nz}{q})$＋ｄ×Ｃｆ’（ｚ）×$(1-\frac{nz}{p})(1+\frac{nz}{q})$｝＞｛ｃ×Ｆｔ’（ｚ）＋ｄ×Ｃｆ’（ｚ）｝×$(1-\frac{n^2z^2}{pq})$と言えるのは，$(1+\frac{nz}{p})(1-\frac{nz}{q})$＝Ｘ，$(1-\frac{nz}{p})(1+\frac{nz}{q})$＝Ｙと置いたときに，ｃ×Ｆｔ’（ｚ）×Ｘ＞ｃ×Ｆｔ’（ｚ）×$\frac{X+Y}{2}$＞ｄ×Ｃｆ’（ｚ）×$\frac{X+Y}{2}$＞ｄ×Ｃｆ’（ｚ）×Ｙで，かつ｛ｃ×Ｆｔ’（ｚ）×Ｘ－ｃ×Ｆｔ’（ｚ）×$\frac{X+Y}{2}$｝＝ｃ×Ｆｔ’（ｚ）×$\frac{X-Y}{2}$＞｛ｄ×Ｃｆ’（ｚ）×$\frac{X+Y}{2}$－ｄ×Ｃｆ’（ｚ）×Ｙ｝＝ｄ×Ｃｆ’（ｚ）×$\frac{X-Y}{2}$だからである。ｃとｄは任意の分数だから，ｃ×Ｆｔ’（ｚ）＋ｄ×Ｃｆ’（ｚ）＝Ｑｔ’（ｚ）を満たすｃとｄを必ず見出すことができる。したがって｛ｃ×Ｆｔ’（ｚ）×Ｘ＋ｄ×Ｃｆ’（ｚ）×Ｙ｝＞Ｑｔ’（ｚ）×$(1-\frac{n^2z^2}{pq})$と言えるので，先の式より$\frac{c\times Ft+d\times Cf}{Qt}$の分子＞分母である。

ちなみに，上述のようにまとめ直した際には訂正しているが，この項目㉕には誤植が複数見られる。$1+\frac{nz}{q}$とあるのは正しくは$1+\frac{nz}{p}$である。(since q greater than) p とあるのはｐの位置が間違いで，括弧内に収めねばならない。また「項目６」は正しくは７（訳注１の⑦）もしくは上掲⑯のことではないか（*Ibid.*）。

㉖$\frac{1\times Ft+3\times Cf}{4}<\frac{2\times Ft+2\times Cf}{4}<\frac{3\times Ft+1\times Cf}{4}$という三つの連続するｃ×Ｆｔ（ｚ）＋ｄ×Ｃｆ（ｚ）を考えるとき，ｐ＞１であれば$\frac{3Ft+Cf}{4}$＞Ｑｔ＞$\frac{Ft+Cf}{2}$と言える理由を考察する。上掲㉑で面積を比較した結果から分かる通り，Ｑｔ＞$\frac{Ft+Cf}{2}$である。また上掲㉕より，$\frac{3Ft}{4}$の流率＞$\frac{Cf}{4}$の流率であれば$\frac{3Ft+Cf}{4}$＞Ｑｔである。訳注１の項目⑦および上掲⑯より，Ｃｆ’（ｚ）／Ｆｔ’（ｚ）＝$\left(1-\frac{nz}{p}\right)^{p-1}\left(1+\frac{nz}{q}\right)^{q-1}\Big/\left(1+\frac{nz}{p}\right)^{p-1}\left(1-\frac{nz}{q}\right)^{q-1}$だから，上掲⑭と同様に，この比の自然対数を取ると（ｐ－１）×$\log\left(1-\frac{nz}{p}\right)$＋（ｑ－１）×$\log\left(1+\frac{nz}{q}\right)$－（ｐ－１）×$\log\left(1+\frac{nz}{p}\right)$－（ｑ－１）×$\log\left(1-\frac{nz}{q}\right)$＝（ｐ－１）｛$\log\left(1-\frac{nz}{p}\right)-\log\left(1+\frac{nz}{p}\right)$｝－（ｑ－１）｛$\log\left(1-\frac{nz}{q}\right)-\log\left(1+\frac{nz}{q}\right)$｝となる。これをマクローリン展開すると２（ｑ－１）$(\frac{nz}{q}+\frac{n^3z^3}{3q^3}+\frac{n^5z^5}{5q^5}+\cdots)$－２（ｐ－１）$(\frac{nz}{p}+\frac{n^3z^3}{3p^3}+\frac{n^5z^5}{5p^5}+\cdots)$で，次数が同じ項ごとにまとめて加減していくと２ｎｚ$(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})-\frac{2n^3z^3}{3}(\frac{1}{p^2}-\frac{1}{q^2}-\frac{1}{p^3}+\frac{1}{q^3})-\frac{2n^5z^5}{5}(\frac{1}{p^4}-\frac{1}{q^4}-\frac{1}{p^5}+\frac{1}{q^5})$－…となる。上掲⑱よりｚ＝$\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n^3-n^2}}$のとき｛Ｑｔ’（ｚ）／Ｆｔ’（ｚ）｝×｛Ｃｆ’（ｚ）／Ｑｔ’（ｚ）｝＝Ｃｆ’（ｚ）／Ｆｔ’（ｚ）も最大値を取るだろう。このｚの値を代入

すると，上の級数は$\frac{2p^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}}{(n-1)^{\frac{1}{2}}}$（$\frac{1}{p}-\frac{1}{q}$）$-\frac{2p^{\frac{3}{2}}q^{\frac{3}{2}}}{3(n-1)^{\frac{3}{2}}}$（$\frac{1}{p^2}-\frac{1}{q^2}-\frac{1}{p^3}+\frac{1}{q^3}$）$-\frac{2p^{\frac{5}{2}}q^{\frac{5}{2}}}{5(n-1)^{\frac{5}{2}}}$（$\frac{1}{p^4}-\frac{1}{q^4}-\frac{1}{p^5}+\frac{1}{q^5}$）－…と書ける。プライスはｐ／ｑが最小になるときに極大に到達すると述べてｐ＝２とｑ＝∞を代入し，級数の値として$2\times\sqrt{2}\times\frac{1}{2}-\frac{4}{3}\times\sqrt{2}\times\frac{1}{8}-\frac{8}{5}\times\sqrt{2}\times\frac{1}{32}-\cdots\fallingdotseq 1.072$を求め，$e^{1.072}\fallingdotseq 2.92$をＣｆ’（ｚ）／Ｆｔ’（ｚ）の極限値として導く。したがって$\frac{3Ft}{4}$の流率＞$\frac{Cf}{4}$の流率を変形したＣｆ’（ｚ）／Ｆｔ’（ｚ）＜３の条件を満足することが判明する。よって$\frac{3Ft+Cf}{4}$＞Ｑｔである。

以上より$\frac{3Ft+Cf}{4}$＞Ｑｔ＞$\frac{Ft+Cf}{2}$（＞$\frac{Ft+3Cf}{4}$）がＱｔの取り得る範囲だとはっきりした。この範囲はｐとｑが大きくなればなるほど狭まる。ｐ＝ｑか，ｐ≒ｑと見なしてよいところまでｐとｑが大きくなれば，上記級数は０となってＣｆ’（ｚ）／Ｆｔ’（ｚ）＝１となるため上述の範囲は解消し，Ｑｔ＝$\frac{Ft+Cf}{2}$が成立する。しかしｐ≠ｑとしてｐ≧１０かつｑ≧１０の条件が満たされれば，必ず「ＱｔはＣｆとＦｔの七つの算術平均の四番目よりも大きく，五番目よりも小さい」（Price 1765, 323）。判読しにくい表現だが，先の三つの場合と同様に$\frac{1\times Ft+7\times Cf}{8}<\frac{2\times Ft+6\times Cf}{8}<\frac{3\times Ft+5\times Cf}{8}<\cdots<\frac{7\times Ft+1\times Cf}{8}$を考えれば，$\frac{4\times Ft+4\times Cf}{8}$（＝$\frac{Ft+Cf}{2}$）＜Ｑｔ＜$\frac{5\times Ft+3\times Cf}{8}$を意味していると分かる。この不等式の後段は，先述した方法を用いて$\frac{5Ft}{8}$の流率＞$\frac{3Cf}{8}$の流率，すなわちＣｆ’（ｚ）／Ｆｔ’（ｚ）＜$\frac{5}{3}$が成り立てば証明できる。仮にｐ＝１０，ｑ＝１１，ｎ＝２１を上記級数に代入して計算すると，級数の値はおよそ０．０２８９となり，Ｃｆ’（ｚ）／Ｆｔ’（ｚ）＝$e^{0.0289}\fallingdotseq 1.029$だから，上記の条件を満たしていると分かる。だが例えば，ｐ＝３，ｑ＝１１のときには$e^{0.539}\fallingdotseq 1.714$となり，$\frac{5}{3}$未満の条件を満たさない。

㉗上掲㉕および㉖で示した不等式に現れるｃ×Ｆｔ＋ｄ×Ｃｆ（ｃとｄは分数）は，ｚが０から増大していく際に，垂線Ｑｔと同時に動いて面積を描いていく仮設の垂線と見なしても構わない。したがって，この垂線とＱｔとの関係について妥当することは，それが描く面積と，Ｑｔによって描かれる面積ＲｈｔＱとの関係にも妥当する。

㉘上掲㉗を受けて，$\frac{3Ft+Cf}{4}$の描く面積を$\frac{3}{4}$×ＤｈｔＦ＋$\frac{1}{4}$×ＤｈｆＣとする。上掲㉖よりＱｔ＜$\frac{3Ft+Cf}{4}$だからＲｈｔＱ＜$\frac{3DhtF+DhfC}{4}$と置けるので，上掲㉒と同様の方法でＢ×$\frac{3DhtF}{4}$＜Ａ×$\frac{3DhfC}{4}$とするとＢ×（ＲｈｔＱ－$\frac{DhfC}{4}$）＜Ａ×$\frac{3DhfC}{4}$が成り立つ。したがって$\frac{A}{B}$＞（ＲｈｔＱ－$\frac{DhfC}{4}$）×$\frac{4}{3DhfC}$より$\frac{A}{B}+\frac{1}{3}>\frac{4RhtQ}{3DhfC}$だから$\frac{DhfC}{RhtQ}>\frac{4B}{3A+B}=\frac{2B}{3-B}$（Ａ＋Ｂ＝２）である。ＤｈｆＣ＜ＲｈｔＱであることに注意し，上掲㉓でＤｈｔＦについて語られていることをＤｈｆＣに置き換えると，$\Sigma\times\frac{2B}{3-B}<\frac{DhfC}{ACFH}<\Sigma$である。同じく㉓で$\Sigma<\frac{DhtF}{ACFH}$

＜Σ×Ａと示されているので，訳注１の⑫の直後に続く箇所をふまえれば，$\Sigma+\Sigma\times\frac{2B}{3-B}<\Delta_3<\Sigma+\Sigma\times A$と書ける。ただしＡ＞１より，この不等式の後段が与えるΔ_3の上限値は２Σとしたほうが，より範囲を狭められると判明している（上掲㉔）。ここでの問題は前段である。上式のＢに元の値を代入して$\Sigma+\Sigma\times\frac{2\times\left(1-2Ea^pb^q-\frac{2Ea^pb^q}{n}\right)}{3-\left(1-2Ea^pb^q-\frac{2Ea^pb^q}{n}\right)}=\Sigma+\Sigma\times\frac{1-2Ea^pb^q-\frac{2Ea^pb^q}{n}}{1+Ea^pb^q+\frac{Ea^pb^q}{n}}$と表し，分母を比較すると，この下限値は上掲㉔の不等式の前段にも記した$\frac{2\Sigma}{1+2Ea^pb^q+\frac{2Ea^pb^q}{n}}=\Sigma+\Sigma\times\frac{1-2Ea^pb^q-\frac{2Ea^pb^q}{n}}{1+2Ea^pb^q+\frac{2Ea^pb^q}{n}}$よりも大きいと分かるから，$\Delta_3$の範囲をより狭めることができたと言える。こうしてプライスは，Δ_3こと$\frac{DhtF+DhfC}{ACFH}$の取り得る値を前後ないし上下の双方からよりいっそう挟み込み，上掲㉔では不十分だった規則２の全般的改良に成功したと言える。

以上は，㉖で見た通りｐとｑのいずれかの値が小さい場合に妥当する。ｐとｑの両方が１０以上の際には，$RhtQ<\frac{5DhtF+3DhfC}{8}$と置き，不等式$B\times\left(RhtQ-\frac{3DhfC}{8}\right)<A\times\frac{5DhfC}{8}$を立てて同様に計算すると$\frac{DhfC}{RhtQ}>\frac{8B}{5A+3B}=\frac{4B}{5-B}$と求まる。よって$\Sigma\times\frac{4B}{5-B}<\frac{DhfC}{ACFH}$となるから$\Sigma+\Sigma\times\frac{4\times\left(1-2Ea^pb^q-\frac{2Ea^pb^q}{n}\right)}{5-\left(1-2Ea^pb^q-\frac{2Ea^pb^q}{n}\right)}=\Sigma+\Sigma\times\frac{1-2Ea^pb^q-\frac{2Ea^pb^q}{n}}{1+\frac{Ea^pb^q}{2}+\frac{Ea^pb^q}{2n}}<\Delta_3$と分かる。分母の値がより小さくなっているため，$\Delta_3$の取り得る値の下限は上昇している。さらにｐ＝１００，ｑ＝１０００，ｎ＝１１００を上掲㉖の級数$\frac{2p^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}}{(n-1)^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)$－…に代入してみると，その値は約０．１１４６７６となるので，Ｃｆ’（ｚ）／Ｆｔ’（ｚ）＝$e^{0.114676}$≒１．１２１５１である。プライスは$\Sigma+\Sigma\times\frac{1-Ea^pb^q-\frac{2Ea^pb^q}{n}}{1+\frac{Ea^pb^q}{10}+\frac{Ea^pb^q}{10n}}<\Delta_3$の不等式を与え，下限値をさらに上昇させようとするが，この式には二つ間違いがあると考えられる（誤りを指摘した先行研究が存在するか否かは不明）。まず，上述してきたことからすると，分数部分の分子の第二項は「$-Ea^pb^q$」ではなく「$-2Ea^pb^q$」でなければならない。また，分母に見られる数字１０を導き出すためには，$\frac{DhfC}{RhtQ}>\frac{40B}{21A+19B}=\frac{20B}{21-B}$の条件を置かねばならないが，すでに㉖で確認した通り，これに対応する前提$\frac{21Ft+19Cf}{40}>Qt$を成り立たせるには$\frac{21Ft}{40}$の流率＞$\frac{19Cf}{40}$の流率，すなわちＣｆ’（ｚ）／Ｆｔ’（ｚ）＜$\frac{21}{19}$≒１．１０５が満たされる必要がある。しかし上記の通り，ｐ＝１００，ｑ＝１０００のときのＣｆ’（ｚ）／Ｆｔ’（ｚ）はこの値を上回ってしまう。よって，この点を修正するに

は，例えば$\frac{DhfC}{RhtQ} > \frac{34B}{18A+16B} = \frac{17B}{18-B}$として$\Sigma + \Sigma \times \frac{17\times\left(1-2Ea^pb^q-\frac{2Ea^pb^q}{n}\right)}{18-\left(1-2Ea^pb^q-\frac{2Ea^pb^q}{n}\right)} = \Sigma + \Sigma \times \frac{1-2Ea^pb^q-\frac{2Ea^pb^q}{n}}{1+\frac{2Ea^pb^q}{17}+\frac{2Ea^pb^q}{17n}} < \Delta_3$と定める（１０を８．５に改める）とよいだろう。$\frac{18Ft}{34}$の流率＞$\frac{16Cf}{34}$の流率を変形すればＣｆ’（ｚ）／Ｆｔ’（ｚ）＜$\frac{18}{16}$＝１．１２５だから，ごく僅差だが$\frac{18Ft+16Cf}{34}$＞Ｑｔは成立する。

「規則２の証明」の後半はここで閉じられる。末尾でプライスは，２Σは「つねに，大きな困難もなく近似的に計算可能だ」と述べる。それは，$\Sigma = \frac{RhtQ}{ACFH} = \frac{n+1}{n} \times \frac{\sqrt{2pq}}{\sqrt{n}} \times Ea^pb^q \times \left(mz - \frac{m^3z^3}{3} + \cdots\right)$におけるＥａ^{p}ｂ^{q}と級数$mz - \frac{m^3z^3}{3} + \cdots$それぞれの近似値が，ベイズの原論文で与えられたもので「十分に正確」だからであると（*Ibid.*, 325）。これらの近似値を与える数式の根拠は，ベイズの原論文にもプライス「規則２の証明」にも明示されていないが，Ｅａ^{p}ｂ^{q}については上掲⑳の通りスターリングの定理を用いれば導出できる。$E = \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n \times \sqrt{2\pi n} \times e^{\frac{1}{12n}-\frac{1}{360n^3}+\frac{1}{1260n^5}-\cdots}}{\left(\frac{p}{e}\right)^p \times \sqrt{2\pi p} \times \left(\frac{q}{e}\right)^q \times \sqrt{2\pi q} \times e^{\frac{1}{12p}-\frac{1}{360p^3}+\frac{1}{1260p^5}-\cdots} \times e^{\frac{1}{12q}-\frac{1}{360q^3}+\frac{1}{1260q^5}-\cdots}} = \frac{\frac{n^{p+q}}{e^{p+q}} \times \sqrt{n}}{\frac{p^pq^q}{e^{p+q}} \times \sqrt{2\pi pq}} \times e^{\left(\frac{1}{12n}-\frac{1}{12p}-\frac{1}{12q}\right)-\left(\frac{1}{360n^3}-\frac{1}{360p^3}-\frac{1}{360q^3}\right)+\left(\frac{1}{1260n^5}-\frac{1}{1260p^5}-\frac{1}{1260q^5}\right)-\cdots}$だから，これに$\sqrt{2\pi}$＝２×√￣Ｋを代入すると同時に$a^pb^q = \left(\frac{p}{n}\right)^p \times \left(\frac{q}{n}\right)^q = \frac{p^pq^q}{n^{p+q}}$を掛け合わせると，求める数式が現れる。級数$mz - \frac{m^3z^3}{3} + \cdots$の近似式については安藤（1976, 39-40）を参照されたい。

７）規則３は，Ｅａ^{p}ｂ^{q}の近似値と級数$mz - \frac{m^3z^3}{3} + \cdots$の近似値を規則２に代入することで求められるので，数式の基本形は両規則に共通する（安藤 1976, 40-41）。規則２の導出方法は訳注１で見た通りで，不等式の分子に現れるΣは$\frac{n+1}{n} \times \frac{\sqrt{2pq}}{\sqrt{n}} \times Ea^pb^q \times \left(mz - \frac{m^3z^3}{3} + \cdots\right)$に等しい。ただし訳注６の最後に確認した通りＥａ^{p}ｂ^{q}＝＝$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi pq}} \times e^{\frac{1}{12}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)-\cdots}$だから，これを代入すると$\Sigma = \frac{n+1}{n\sqrt{\pi}} \times \left(mz - \frac{m^3z^3}{3} + \cdots\right) \times h$と整理できる（Hald 1990, 146; Dale 2003, 366）。訳注６冒頭で示した通り$H = e^{\frac{1}{4n}-\frac{1}{24n^3}+\frac{1}{20n^5}\cdots}$である。

８）命題１０を受けた規則１は，過去ｎ（＝ｐ＋ｑ）回の試行においてｐ回起きｑ回起きなかったことが知られている，ある出来事の次の一回の発生確率が，二つの確率Ｘとｘの間に存在すると仮定した場合に，二項定理から導かれる二つの級数の差をもとにして上記発生確率を求められるとする（林 2021, 84-87）。訳注１に示した図を見てほしい。ＡＨ＝１とし，Ａｆの長さをｘ，Ａｔの長さをＸと置き，ｐとｑに適当な値を代入すれ

ば，ＡＦｔの面積からＡＣｆの面積を引き去った残余（ｔＦＣｆの面積）が図形ＡＣＦＨに対して持つ比率Δが求める発生確率となる。Δ＝（ｎ＋１）×Ｅ×｛$\left(\frac{X^{p+1}}{p+1} - q\,\frac{X^{p+2}}{p+2} + q \times \frac{q-1}{2} \times \frac{X^{p+3}}{p+3} - \cdots\right) - \left(\frac{x^{p+1}}{p+1} - q\,\frac{x^{p+2}}{p+2} + q \times \frac{q-1}{2} \times \frac{x^{p+3}}{p+3} - \cdots\right)$｝，ここでＥは｛Ｘ＋（１－Ｘ)｝$^{p+q}$および｛ｘ＋（１－ｘ)｝$^{p+q}$を展開した際の二項係数だから，Ｘおよびｘの値に関わらずｐとｑが決まりさえすれば一意に定まる。過去の全試行でこの出来事が起きたとすればｑ＝０であるため括弧内の級数の第二項以下は消え，かつＥ＝１となる。このときｎ＝ｐよりΔ＝（ｐ＋１）×１×（$\frac{X^{p+1}}{p+1} - \frac{x^{p+1}}{p+1}$）＝$X^{p+1} - x^{p+1}$である。

９）ここの「見込み」はいわゆるオッズであり，成功（発生する）と失敗（発生しない）の度数比を表す。したがって，一般化された見込みを表す分数を確率表記に直すと$\frac{2^{p+1}-1}{1+(2^{p+1}-1)}$＝１－$\frac{1}{2^{p+1}}$となり，ｐ＝１のときの確率は３／４だと分かる。計算方法の数学的根拠については訳注１３を参照されたい。

１０）当該面が出る回数と出ない回数の比が１４０万回に対して１回とすれば，訳注９の定義に従いオッズは１４０万対１である。同様に１６０万回に対して１回であればオッズは１６０万対１となる。前者の場合，１４０万＋１回中の１回は他の面が出るため，その差は１４０万回であり，後者の場合の差は１６０万回である。オッズから確率を導き出すと，１４０万回を下回らない，つまり当該面が１４０万回出る確率は$\frac{1400000}{1400001}$，同様に１６０万回出る確率$\frac{1600000}{1600001}$である。前者の確率をｘ，後者の確率をＸと置き，過去１００万回の試行において当該面のみが出続けたとすれば，訳注８で示したｐが１００万かつｑが０のケースとなるから，ＡＣｆの面積／ＡＣＦＨの面積＝$\left(\frac{1400000}{1400001}\right)^{1000001}$≒０．４８９５４（①）かつＡＦｔの面積／ＡＣＦＨの面積＝$\left(\frac{1600000}{1600001}\right)^{1000001}$≒０．５３５２６（②）である。したがって１－②≒０．４６４７４（③）はＨＦｔの面積が図形ＡＣＦＨに対して持つ比率であり，これは当該面の出る確率が$\frac{1600000}{1600001}$を上回る確率を示す。①が示すのは当該面の出る確率が$\frac{1400000}{1400001}$を下回る確率である。両確率が０．５を超えないという意味でプライスは「起こりそうにない」と述べているに過ぎず，確率が非常に小さいと述べているわけではない。また，当該面が次の一回も続けて出る確率がｘとＸの間に存在する確率は②－①より約０．０４５７であり，この点で安藤が①－③≒０．０２４８を求めてこの確率と見なしているのは（安藤 1976, 42)，誤りである。

１１）訳注１０と同様に計算して，$\left(\frac{3000000}{3000001}\right)^{1000001} - \left(\frac{600000}{600001}\right)^{1000001}$＝０．７１６５３…－０．１８８８７…≒０．５２７６６である。

１２）過去に１００万回連続して日が昇ったのを見てきた後，１００万＋１回目に再び日が昇ると考える場合，その考えが正しい見込み（オッズ）は2^{p+1}－１：１のｐに１００万を代入して求められる（Dale 2003, 328)。訳注９の通り確率に直すと，限りなく１に近づくことが分かる。ただしこれは，太陽が明日も昇る確率が１と１／２の間にあると判断することが妥当だと言える確率であって，プライスが「これについての見込み」と述べている「これ」は明日も太陽が昇る確率そのものを指す。それが１４０万／１４

０万＋１の値以上となる確率，および１６０万／１６０万＋１の値以下となる確率は，訳注１０で示した記号を使い，それぞれ１－①≒０．５１０５，および②である。

１３）以上はヒューム『人間本性論』第一巻第三部の特に第十一節および第十二節の議論を彷彿とさせる。「太陽が明日昇る」ことは（Hume 1978, 124／訳 151），繰り返された経験から生じる習慣に支えられた蓋然的命題に過ぎないが，これが限りなく「証明」に近い明証性を得るのはどのような心の働きによるのかを，ヒュームは論じている。一方の対象が他方の対象に先行し，両方が恒常的に随伴し，かつ前者に類似した対象と後者に類似した対象も同様の関係に立つとすれば，心象としての因果関係の連鎖が自ずから成立するとヒュームは言う。過去の経験から未来を予測する場合にも，私たちは未来が過去に類似すると想定してそうする。「習慣（habit）によって，われわれは，見慣れているのと同じ対象の連鎖を未来にも期待するよう，決定される」（*Ibid.*, 134／訳 161）。このような考え方をプライスも共有し，ベイズによる確率論の枠組を用いながら数学的に定式化したと見なせば，この補遺における狙いの一端も見えるのではないだろうか。

1760 年代にプライスとヒュームが接近していた事実には林 2021 で言及したが，より早くからプライスはヒュームの影響を受けていた。『アメリカ革命の重要性』（1784 年）の「教育について」という章は，「賢慮の最大の証明の一つは賢慮の欠如の感覚だ。最大の物識りはこの感覚を最もふんだんに持つ」という（Price 1784, 61），いわゆる無知の知に立って，知識を押し付けるのではなく自ら考える方法を伝えるのが教育だと説いた。誤った教育によって強められた「システム」の支配と見なしてデカルト体系を批判しつつ，正反双方の証拠を比較衡量する習慣を形成する上での「数学の研究」の重要性と，同時にその「偏狭さ」が数理にそぐわない証拠の全否定を通じて「懐疑論」に道を開く危険性を論じたのち（*Ibid.*, 54, 56-58），プライスは若き日の自身の勉学に触れている。バトラー（Joseph Butler, 1692-1752）とクラーク（Samuel Clarke, 1675-1729）に次いで影響を受けたとするのがヒュームである。プライス自身に語らせよう。「どれほど奇妙に思われようと，どうしても言い添えておかねばならないのが，同じく人生の初期に学んだヒューム氏の哲学書に，私が多くを負っていることだ。彼の懐疑論の敵ではあるが，私はヒューム氏の哲学書から恩恵を受けた。偉大な力量で真理の原則を逐一攻撃することにより，彼は私が拠って立つ足場を私に精査させ，また何ものをも性急には承認しないようにと私に教えたのである」（*Ibid.*, 62）。アダム・スミスと生年を同じくするプライスが青年期に読んだのが『人間本性論』だったと想像することに，無理はない。

ヒューム『人間本性論』第一巻第三部第十一節「偶然の蓋然性について」は，サイコロを例に「偶然には完全な無差別（indifference）が本質的である」との命題を立てる。サイコロの各面は等確率で出るという制約条件を想い描くと，「五分の偶然（equal chances）をより多くの数（number）集めたものである場合を除き，一つの偶然が他の偶然に優ることはあり得ない」とヒュームは言う（Hume 1978, 125／訳 152）。したがって，ある偶然的事象の確率が別のそれに優るとされる場合，その根拠は，経験された当該事象の数が多い，あるいは頻度が高いことにあると見て構わないだろう。数は計量できる以上，偶然の四則演算が可能だと述べられているに等しい。さらに同書第十二節「原因の確率について」では，過去に繰り返された経験的事実に基づく因果関係からの将来予測に触れながら，「われわれが過去を未来に投影し，既知のものを未知のものに投影するとき，過去の経験はすべて同じ重みを持ち，均衡をどちらかの側に傾け得るのは，ただ過去の経験の数の多さのみであることは明らかだ」と説かれ（*Ibid.*, 136／訳 164），その論旨はプライスが補遺で述べているものにいっそう近づく。こう述べつつヒュームは，「証明」に至る前の段階で反対の経験的事実に出会うことにより，明証性が減じられるケースも論じる。第十一節ではサイコロの六面中四面に一つの同じ数字，残り二面に別の同じ数字が記されている場合，両者が構成するのは互いに「反対」の事象であり，後

者の分だけ前者に向けられる心の「衝動（impulse)」は分割されて弱められ，信念の度合が落ちると言う（*Ibid.*, 129-30／訳 157)。そして第十二節では「多数の事例における反対の出来事の比を考察する」として，成功と反対（失敗）との比を表すオッズ（この言葉自体は用いられていない）の問題を，航海に出て還る船の比率で表現したのち，厳密な数学的定式化を予見するかのような筆致で，「われわれが互いに反対の経験を未来に投影するとき，われわれにできるのは，ただ，これらの経験をそれらの特定の比で反復することだけである」と記すのである。ヒューム自身は，過去に経験したことのある出来事が将来においても起こる蓋然性に対する信念が「強く生き生きとした（intense and lively)」ものに変じ，明証性をよりいっそう高めるまでの心の動きを追いかけているに過ぎない（*Ibid.*, 139-40／訳 167-68)。だが「特定の比を反復する」といった彼の語彙は，プライスの目には，一定のオッズのもとにある，つまり過去の一定回数の試行中，ある回数起き，別の回数起きなかったことが知られている未知の事象の，次の一回の試行が有する蓋然性を算定する問題について語るものと映ったのではないだろうか。

初めに述べた「太陽が明日昇る」確率を，過去の経験回数から算出する方法を示した一人はラプラスである。『確率の哲学的試論』において確率計算の第七原理として与えられているものが，それに当たる。x（０から１までの任意の値）を日が昇る確率，ｐを日がこれまで一度も途切れることなく昇った回数としたとき，次の一日すなわち明日も太陽が昇る確率は$\int_0^1 x^{p+1}dx \Big/ \int_0^1 x^p dx$と表現でき，これを整理して$\frac{p+1}{p+2}$を導き出した。過去五千年間に日が昇り続けた日数を１８２万６２１３日とすれば，この確率は$\frac{1826214}{1826215}$≒０．９９９９９９４５と求まる（ラプラス 1997, 36, 170-71n)。しかしデイルは，ラプラス流「継起の規則」に基づく確率の計算方法と，ベイズおよびプライスのそれとは，似て非なるものである点に注意を促す（Dale 2003, 326-27)。プライスは，日の出のように過去ｐ回連続して起きてきた出来事が次の一回にも起こる確率の値を，ｐ回連続する確率とｐ＋１回連続する確率との比として直接に算出するのではなく，ｐ回連続した出来事の次の一回の確率が２分の１を上回って存在する確率，つまり確率の確率の大きさとして表現する（訳注１２参照)。出来事の発生確率が２分の１より大きいと見込むことは，どちらかと言えば起こると判断することであり，過去に連続して起きた出来事の経験回数が多いほどこの判断ないし信念の確からしさが強まっていき，起こると判断して間違いないという確信にやがて到達することを，プライスは計算を通じて示した。すなわち$\int_{\frac{1}{2}}^1 x^p dx \Big/ \int_0^1 x^p dx = \frac{\left[{}^1\!/_{p+1} \times x^{p+1}\right]_{\frac{1}{2}}^1}{\left[{}^1\!/_{p+1} \times x^{p+1}\right]_0^1} = 1 - \frac{1}{2^{p+1}}$を信念の正しさの指標とした（訳注９参照)。ラプラスの例と同じ数字をｐに代入すれば，「太陽が明日昇る」と信じてよい度合は$1 - \frac{1}{2^{1826214}}$となり，限りなく１に近づく。

ちなみに，過去ｐ＋ｑ回の試行においてｐ回起きｑ回失敗したことが知られている，未知の出来事の確率を同じくｘとし，次の一回の試行でこの出来事が発生する確率について考察する場合，継起の規則をもとに直接算出すれば$\int_0^1 x^{p+1}(1-x)^q dx \Big/ \int_0^1 x^p (1-x)^q dx$となるが，ベイズ＆プライス流の方法で，発生するという信念の正しさの度合として算出

すると$\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^{p}(1-x)^{q}dx \Big/ \int_{0}^{1} x^{p}(1-x)^{q}dx$となる（トドハンター2017, 259を参照）。ここでｐ＝０，ｑ＝１という極端なケースの確率を求めてみると，前者では３分の１が，後者では４分の１が答えとなる。継起の規則に手厳しいケインズ『確率論』は，過去になされた唯一の試行において失敗したという結果しか記録されていない出来事の確率が「３分の１もある」と仮定すれば，同様の出来事は三つより多く想定できるのだから「矛盾」に陥るとしているが（Keynes 1973, 411-12／訳 432-33），ベイズ＆プライスの確率は，当該出来事が次の一回に起こる確率が２分の１を上回ると信じてよい確率が４分の１だと述べているに過ぎないため，この矛盾を回避できるかもしれない。もちろんケインズは，未知の（事前）確率ｘについて０から１までの任意の値を等しい確からしさでとり得るとした前提の論点先取をも突いているから，その点では，ラプラスだけでなくベイズ＆プライスも（そして偶然の「無差別」を唱えるヒュームさえ）ケインズの眼鏡には適わないことになる。ケインズにおいて重要なのは，ｘの値を決める事情が試行の都度，異なり得るという前提であり，要するに「状況の多様性」である。ケインズは言う，試行回数がいくら大きくなっても，各回が互いに何も異ならなかったら信念を強める効果は働かなかったであろうと（*Ibid*., 243, 259-60／訳 253-54, 270-71）。

このような問題は残るとはいえ，ラプラスに従って確率の値を直接的に心に想い描く方法よりも，ベイズおよびプライスの迂回的方法をとるほうが矛盾は小さいと言えるのではないだろうか。明日もこれまで同様，日は昇りそうだと漠然と信じるだけでも，その信念の正しさ自体を（ヒュームの語彙を使えば）経験的に「証明」する道が開かれるのだからである。プライスは補遺のこれ以降の箇所で，過去の試行において成功した回ばかりでなく失敗した回を含む場合についての確率を導出する。すでに一度言及した，ヒューム『人間本性論』に登場する帰還船と難破船の比率を具体例として参照しよう。ヒュームは統計的に見て１９対１のオッズを与えている（Hume 1978, 134／訳 162）。すなわちｐ＝１９，ｑ＝１である。いま一艘の船が港を出て行ったとき，無事帰還するという観察者の信念が正しい確率は$\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^{19}(1-x)dx \Big/ \int_{0}^{1} x^{19}(1-x)dx$≒０．９９９９８９５と求まる。プライスは二項定理を用いて算出を行うが，結果はもちろん同じである。

１４）訳注８で見た括弧内の級数は，二項定理に従って（１－ｘ）^{q}を展開した１－ｑｘ＋ｑ（$\frac{q-1}{2}$）ｘ^{2}－ｑ（$\frac{q-1}{2}$）（$\frac{q-2}{3}$）ｘ^{3}＋ｑ（$\frac{q-1}{2}$）（$\frac{q-2}{3}$）（$\frac{q-3}{4}$）ｘ^{4}－ｑ（$\frac{q-1}{2}$）（$\frac{q-2}{3}$）（$\frac{q-3}{4}$）（$\frac{q-4}{5}$）ｘ^{5}＋…にｘ^{p}を乗じた式をｘで積分したものである（ｘはXで置換可能）（林 2021, 85, 99）。ｐ＋ｑ＝ｎ＝１１，二項係数Ｅ＝$\binom{11}{1}$＝１１，そしてｑ＝１なので括弧内の級数の第三項以降は０となる。求めるべきは外れくじを引く確率が$\frac{9}{10}$と$\frac{11}{12}$の間に存在する確率であり，与えられた式の通り計算すると，その値は１２×１１×（０．００５５７５７－０．００４９９２４）≒０．０７６９９である。これをオッズ（見込み）に直すと（１－０．０７６９９）＝０．９２３０１：０．０７６９９となり，外れくじを引く確率は九割以上の確率で$\frac{9}{10}$と$\frac{11}{12}$の間に存在しないと分かる。また，外れくじを引く確率が$\frac{9}{10}$を下回る確率（訳注８におけるＡＣｆの面積／ＡＣＦＨの面積）は１２×１１

$\times\left(\frac{\left(\frac{9}{10}\right)^{11}}{11}-\frac{\left(\frac{9}{10}\right)^{12}}{12}\right)$ ≒０．６５９，オッズは０．６５９：（１－０．６５９＝）０．３４１である。当たりくじを引く確率が$\frac{1}{10}$を上回る確率は約６６％と解釈できる。

１５）訳注１４で確認できる通り，ｑ＝２ならば括弧内の級数の第四項以降は０となる。したがって求める確率は（２２＋１）×２３１×$\left\{\left(\frac{\left(\frac{11}{12}\right)^{21}}{21}-2\times\frac{\left(\frac{11}{12}\right)^{22}}{22}+2\times\frac{1}{2}\times\frac{\left(\frac{11}{12}\right)^{23}}{23}\right)-\left(\frac{\left(\frac{9}{10}\right)^{21}}{21}-2\times\frac{\left(\frac{9}{10}\right)^{22}}{22}+2\times\frac{1}{2}\times\frac{\left(\frac{9}{10}\right)^{23}}{23}\right)\right\}$ ≒０．１０８４である。外れくじを引く確率が$\frac{9}{10}$と$\frac{11}{12}$の間に存在しないオッズは（１－０．１０８４＝）０．８９１６対０．１０８４と分かる。外れくじを引く確率が$\frac{9}{10}$を下回る確率は（２２＋１）×２３１×$\left(\frac{\left(\frac{9}{10}\right)^{21}}{21}-2\times\frac{\left(\frac{9}{10}\right)^{22}}{22}+2\times\frac{1}{2}\times\frac{\left(\frac{9}{10}\right)^{23}}{23}\right)$ ≒０．５９１９，そのオッズは０．５９１９：（１－０．５９１９＝）０．４０８１となる。プライスが与えている値と若干異なるが，電子計算機を持たない時代における手計算の狂いによるものであろう。

１６）ｑ＝４であるから，訳注１４および１５同様に式を立てると，括弧内の級数の第六項以降が０になる。またｐ＝４０よりｐ＋ｑ＝ｎ＝４４，Ｅ＝$\binom{44}{4}$＝１３５７５１である。計算式は多少込み入ったものになるが，前者の確率は（４４＋１）×１３５７５１×$\left\{\left(\frac{\left(\frac{11}{12}\right)^{41}}{41}-4\times\frac{\left(\frac{11}{12}\right)^{42}}{42}+4\times\frac{3}{2}\times\frac{\left(\frac{11}{12}\right)^{43}}{43}-4\times\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{\left(\frac{11}{12}\right)^{44}}{44}+4\times\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{\left(\frac{11}{12}\right)^{45}}{45}\right)-\left(\frac{\left(\frac{9}{10}\right)^{41}}{41}-4\times\frac{\left(\frac{9}{10}\right)^{42}}{42}+4\times\frac{3}{2}\times\frac{\left(\frac{9}{10}\right)^{43}}{43}-4\times\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{\left(\frac{9}{10}\right)^{44}}{44}+4\times\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{\left(\frac{9}{10}\right)^{45}}{45}\right)\right\}$ ≒０．１５２６，後者の確率は（４４＋１）×１３５７５１×$\left(\frac{\left(\frac{9}{10}\right)^{41}}{41}-4\times\frac{\left(\frac{9}{10}\right)^{42}}{42}+4\times\frac{3}{2}\times\frac{\left(\frac{9}{10}\right)^{43}}{43}-4\times\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{\left(\frac{9}{10}\right)^{44}}{44}+4\times\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{\left(\frac{9}{10}\right)^{45}}{45}\right)$ ≒０．５２７１と求まる。前者に関するオッズ（１－０．１５２６＝）０．８４７４：０．１５２６はおよそ５．５５対１であり，後者に関するオッズ０．５２７１：（１－０．５２７１＝）０．４７２９は「五分五分の偶然」に近い。

１７）かなり込み入ったものになるため式は省略するが，ｐ＋ｑ＝ｎ＝１１０，Ｅ＝$\binom{110}{10}$とすると，訳注１４～１６で示したと同様の級数の第十二項以降が０になる。訳注１３

のように現代表記の式を立てて計算すると，それぞれ$\int_0^{\frac{9}{10}} x^{100}(1-x)^{10}dx \Big/ \int_0^1 x^{100}(1-x)^{10}dx \fallingdotseq$ $\frac{84734}{192099}$＝０．４４１０９５…，$\int_{\frac{11}{12}}^1 x^{100}(1-x)^{10}dx \Big/ \int_0^1 x^{100}(1-x)^{10}dx \fallingdotseq \frac{61453}{192099}$＝０．３１９９…，$\int_{\frac{9}{10}}^{\frac{11}{12}} x^{100}(1-x)^{10}dx \Big/ \int_0^1 x^{100}(1-x)^{10}dx \fallingdotseq \frac{45912}{192099}$＝０．２３９…である。したがって，プライスが挙げた三つのうち最初の数字のみ正確で，後ろ二つは（おそらく一方を誤って求め，最初の数字を１から引き去った残余からそれを引いたために）真の値からは若干外れている。パスカルやライプニッツの有名な発明は措き，計算機のなかった時代ゆえの過ちと見れば済む。ただし，このずれに合わせてオッズを修正し，３対１を，１から最後の数字を引いた０．７６１と最後の数字を比べた１９：６に置き換えねばならない。

１８）訳注１７をふまえると，ここの３１個は正しくは３２個，２５個は正しくは２４個である。

１９）『偶然論』第三版 250-51 頁（第二版 242-43 頁）に述べられた「所見Ｉ」の冒頭には「本性上の構成において起こるべく，また失敗するべく企図されている様々な出来事を偶然が攪乱することは滅多にない」とある。同等の形質をした白黒二面を持つ円い金属片でコイン投げを行う場合，試行を長時間繰り返しても２分の１の確率通りに白面と黒面が出ないかもしれないが，「どちらの面についても，その出現は永続的に均等比へと向かうであろう」とド・モアブルは言う（De Moivre 1756, 250）。３６００回の試行において，中央の１８００回の両側に$\frac{1}{2}\times\sqrt{3600}$＝３０回の幅をとった１７７０回から１８３０回までの範囲に，「２対１以上のオッズ」すなわち３分の２以上の確率で，一方の面が出る回数は含まれる（この命題の根拠については林 2021, 88-89 参照）。この幅の値の大きさが試行回数のそれに対して持つ比は後者を大きくすればするほど狭まる。さらには，この幅を二倍三倍と広げていくほど上記のオッズは上昇して１に近づいていくが，試行回数を大きなものにすれば，この「範囲の拡張」が試行総回数に占める比は小さくなる。したがって後者を無限大に取れば，偶然による「不規則性」は残り続けるにせよ「原初の企図（ORIGINAL DESIGN）から自然的に帰結する，かの秩序の再現性」が必ずや勝り，一方の面の出現回数が限りなく試行総回数の中央に近づくこと，すなわち均等比の実現が見られるようになるとされる（De Moivre 1756, 251）。

２０）訳注１７より，０．２５０６ではなく０．２３９が正しい。

２１）訳注３でも触れた正誤表により，分母の「$-2Ea^pb^q$」は「$+2Ea^pb^q$」に改められた。訳注１の項目⑫とその後の叙述をふまえれば明らかなことである。

２２）Ｅではなく Σ が正しい（Price 1983, 33n）。

２３）$z=\frac{1}{110}$としてｍｚ＝$\frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{pq}}\times z=\frac{\sqrt{1100^3}}{\sqrt{1000\times100}}\times\frac{1}{110}$＝１．０４８８０８８…である。しかし，訳注２でも見たようにｍ＝$\frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{pq}}$ではなくｍ＝$\frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{2pq}}=\frac{n\sqrt{n}}{\sqrt{2pq}}$が正しく，また本文ではｚが脱落している（Price 1983, 34n）。

２４）訳注２３で見た正しいｍの値を用いて計算すると，ｍｚ＝$\frac{\sqrt{1100^3}}{\sqrt{2\times1000\times100}}\times\frac{1}{110}\fallingdotseq$０．７４であり，級数ｍｚ－$\frac{m^3z^3}{3}$＋…の値は約０．６２５４となる。またｈの値はほぼ１に

等しい。これらの数字を元にプライスは，訳注６で詳細に点検した「規則２の証明」論文の項目㉘で計算を（ｐとｑの値を入れ替えて）やり直し（Price 1765, 324），「前者」すなわち$\frac{2\Sigma}{1+2Ea^pb^q+\frac{2Ea^pb^q}{n}}$については約０．６５（＝$\frac{186}{186+100}$，分母の二数の比がオッズを示す）を，「後者」すなわち$\frac{2\Sigma}{1-2Ea^pb^q-\frac{2Ea^pb^q}{n}}$については約０．７７（＝$\frac{334}{334+100}$）を導く。すでに訳注６で脱字を補いながら確認したように，その後プライスは前者をΣ＋Σ×$\frac{1-2Ea^pb^q-\frac{2Ea^pb^q}{n}}{1+\frac{Ea^pb^q}{10}+\frac{Ea^pb^q}{10n}}$（＞$\frac{2\Sigma}{1+2Ea^pb^q+\frac{2Ea^pb^q}{n}}$）に，後者を２Σ（＜$\frac{2\Sigma}{1-2Ea^pb^q-\frac{2Ea^pb^q}{n}}$）に置き換え，求める確率の範囲をより狭めようとした。その結果，前者の値として０．６７４８（＝$\frac{207}{207+100}$）が，後者の値として０．７０５７（＝$\frac{239}{239+100}$）が与えられたが（ただしプライスは前後逆にオッズを対応させている。上記は修正済み）（*Ibid.*; Deming 1940, iii-iv），これも訳注６で指摘した通り，前者については，例えばΣ＋Σ×$\frac{1-2Ea^pb^q-\frac{2Ea^pb^q}{n}}{1+\frac{2Ea^pb^q}{17}+\frac{2Ea^pb^q}{17n}}$と改めなければ必要条件が満たされない。改訂値を計算すると約０．６７４６であり，若干だが確率の取り得る範囲はさらに広がり，精度が低下したと分かる。以上のことから，過去１１００回の試行において１００回発生し１０００回失敗した事実が知られている，発生確率自体は未知の出来事の次の一回の発生確率が$\frac{9}{110}$（＝$\frac{100}{1100}-\frac{1}{110}$）と$\frac{11}{110}$（＝$\frac{100}{1100}+\frac{1}{110}$）の，または発生回数と失敗回数を入れ替えたとき$\frac{99}{110}$（＝$\frac{1000}{1100}-\frac{1}{110}$）と$\frac{101}{110}$（＝$\frac{1000}{1100}+\frac{1}{110}$）の範囲内に収まる蓋然性は，およそ０．６７５～０．７０だと判明する。

２５）この「証明」は翌年刊行の Price 1765 すなわち「規則２の証明」で与えられた。訳注１ならびに６を見られたい。

Ⅳ　解題

プライスの手を介して 1764 年の『王立協会紀要』に発表されたベイズの「偶然論における一問題の解法」論文（Bayes 1764b）の末尾には規則１から３までが掲載されているが，本稿ならびにその前編に当たる林 2021 で見たように，ベイズの原論文で解明できているものは規則１までであり，規則２と３はただ与えられただけで，厳密な証明はなされていなかった。それを補うべく，プライスはベイズの遺稿をさらに編集し直し，それに自ら改良を施すかたちで，翌 65 年の同紀要に「規則２の証明」論文（Price 1765）を掲載した。これによって初めて，読者は原論文の内容を隅々まで理解した上で読み通すことが可能になったと言える。この「規則２の証明」は本稿の訳注１および６において細かく点検したが，用いられている数学的な道具は，原論文にも見られるニュートン由来の二項定理や微積に止まらず，マクローリン展開，ベルヌーイ数，スターリングの定理など多岐に及ぶ。ド・モアブルやシンプスンといった当代の数学者たちによる書物の助けを借りているとは

いえ，特に（ベイズ以上に）プライスがこれらの数学用具を縦横に駆使するだけの力量を具えていたという事実が，本稿を通じて明白になったように思われる。

プライスがベイズの原論文を発表した背景事情は，彼の三歳違いの妹サラ（Sarah Price, 1726-1803）の息子モーガン（William Morgan, 1750-1833）が遺した『プライス伝』で語られている。それによると，1761 年にベイズが他界した後，この「真に非凡な人」の親戚筋から遺稿の整理を頼まれたのだという（Morgan 1815, 24-25）。ちょうど同じ頃（1762 年初め），妹と全く同名の妻サラ（Sarah Blundell, 1728-86）が不治の病に罹り，プライス自身も身体の不調や，牧師としての職務の不振（会衆の少なさ）を受けて精神的に苦しむ中，およそ二年をかけて「かなりゆっくりと」遺稿の整理を行い（*Ibid.*, 25），ようやく発表に至ったもののようである。なおこのとき，二度目の滞英（1757 年 7 月～62 年 8 月）を終えて帰米していた知友フランクリンに宛ててベイズの原論文を送ったところ，「翌年」（65 年だろうか）の『アメリカ哲学協会紀要』*American Philosophical Transactions* でただちに紹介され，プライスは「満足を覚えた」とモーガンは述べるが（*Ibid.*, 26），デイルは同紀要の現物が確認できないことなどを理由に事実誤認を疑う（Dale 1999, 553-54n）。アメリカ植民地での反応の是非はともかく，プライスは原論文の出来自体に不満を抱いていたため，まもなく「規則２の証明」を用意し，その発表を経て彼自身が王立協会会員に選出された（65 年 12 月）。若き日に医師としての修業を積んだモーガンは，この選出が「同好の士（company）」の輪へと伯父を引き入れたことこそ，「当時の精神状態においては，彼の健康にとって大変必要なことだった」と医学的語彙を交えて回顧する（Morgan 1815, 27）。社交の機会が開けたことが，妻の苦しみを思い，塞ぎ込み，自らを過小評価する鬱屈した心理に陥っていたプライスを救ったのである。日々の時間を哲学研究と宗教上の務めとに「均等に」割き，バランスよく自身を律し始めた彼は，最後まで信念をゆるがせにせず泣き言を口にしない強靭な姿勢も相まって，やがて健康を取り戻した（*Ibid.*, 28-29）。

ちょうど同じ頃，プライスはヒュームの奇蹟論への批判にも取り組んでいる。委細は稿を改めて検討しなければならないが，本稿の訳注１３でも見たように，ベイズならびにプライスの議論は懐疑論と格闘する際の武器としても機能し得る。モーガンによれば，プライスは「経験に帰すべき顧慮と比較した場合における証言（testimony）の明証性を難じるヒューム氏の主張を論駁するために」ベイズの議論を応用した（*Ibid.*, 26）。これは，のちにケインズがヒューム『人間知性研究』第十章「奇蹟について」に言及しつつ「いくつかの言明の事前の不確かさの度合が大きいと，さもなければ信頼できるはずの証言の力が抑えられる」と述べた事態をふまえたものである（Keynes 1973, 202／訳 211）。つまり，経験に基礎づけられた証言の数々は互いに「相殺」し合い，そろって確信の度合を下げざるを得なくなるため，奇蹟をめぐる証言を否定する根拠が乏しいことを理由にした奇蹟の消極的肯定法を採る以外に，奇蹟を信じる道はないとしたヒュームの主張（Hume 1748, 182／訳 102-3）を受けたものである。プライスは，主著と呼べる『四論』（1767 年）に付加した脚注で，本稿所収のベイズ原論文補遺と訳注１０で示した議論を踏襲し，たとえ百万回連続して起きた事象であろうと，それが起こらない場合との回数差は将来的に有限と見込めることを確率論的に示す。裏返せば，経験頻度が究極的に低い事象であっても，それを伝える一度限りの証言の通りに，将来，当該事象が生じないとは決して言い切れないと説く（Price 1767, 396-98n; Price 1983, 80n）。脚注の結びでプライスは，「知性とは，経験を頼れと私たちに教える機関（faculty）ではなく，あらゆる場合に，経験からどのような帰結を導き出すべきか，また経験にどの程度の精確さで信念（confidence）を委ねればよいかを決定することができるものだ」と告げる（Price 1767, 398n）。そして彼は，『四論』第二版の一冊をヒュームに献本する（Morgan 1815, 24; Price 1983, 45n; Norton 1996, 122）。

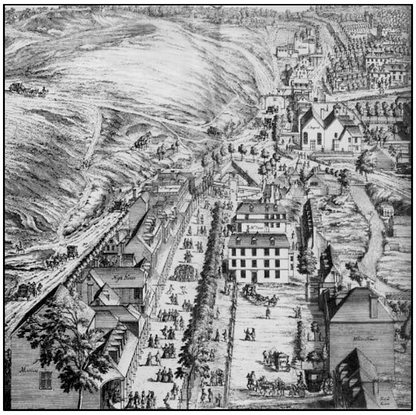
ところで，プライスの数学力はどこで培われたか。アクチュアリーの先駆者として保険業界を担う以前のモーガンに「数学は出来るか」と尋ねて新境地を開いたのはプライスだ

が（ODNB），モーガンの畏敬する伯父は，ジャマイカ植民地帰りの富豪カワード（William Coward, 1647/8-1738）が出資した会衆（独立）派・長老派共同基金（Congregational Fund）を元に 1712 年に設立されたロンドンのムーアフィールズ（Moorfields）非国教徒学院で，「尊きイームズ氏」（John Eames, 1686-1744）のもと「数学・哲学・神学の勉強」に「没頭した」ようである（Morgan 1815, 9-11）。イームズはニュートンの知己であり，王立協会会員として評判も高く，プライスが標準四年の学業を終える頃に惜しまれつつ他界（同時に学院も閉園）するまでの間，解剖学・力学・数学といった自然科学系科目に加え倫理学も担当していた。また，イームズの学院への入学前に，プライスは地元ウェールズで学院を運営（1735～40 年）する「グリフィスス師」（Vavasor Griffiths, d.1741）のもとでも学んでいる（*Ibid.*, 5）。牧師だった彼の父ライス（Rice Price, 1673-1739）も非国教徒学院の出身である。ライスはオックスフォード大卒の長老派牧師ジョーンズ（Samuel Jones, 1628-97）がウェールズに開設した学院，およびシェフィールドのフランクランド（Richard Frankland, 1630-98）の学院を出たジョリ（Timothy Jollie, c.1656-1714）が 1691 年から同地で営んでいた学院に学んだ。彼自身が 17 世紀末から 18 世紀初頭までのおよそ五年間に地元で非国教徒学院を営み，会衆派基金を受け入れて，長老派基金に立脚する（姓が紛らわしい）ユトレヒト大卒のグリフィス（Roger Griffith, d.1708）の学院と競い合ってもいる（Burden 2013）。ライスは息子がグリフィススの学院に在籍する最中に亡くなるが，その兄弟サミュエル・プライスが著名な会衆派牧師ワッツ（Isaac Watts, 1674-1748）の助手を務めながら甥の学資を工面した。プライスは学生として非国教会派の強力な知的ネットワークの中心付近に属していた様子が窺える。ワッツとイームズの共通の師ロウの師がゲールである（林 2021 の訳注３参照）。やがて牧師として身を立て始めた若きプライスが助手として仕えるチャンドラー（Samuel Chandler, 1693-1766）と，先のグリフィススは，ライデン大学への留学経験を持つジョーンズ（Samuel Jones, 1681/2-1719）がグロスターシアに構えた大規模な学院（1708?～19 年）の出身で，そこには，後年にカンタベリ大主教として国王ジョージ三世の戴冠を司式することになるセッカー（Thomas Secker, 1693-1768）がワッツの紹介で籍を置いただけでなく，同窓にはジョゼフ・バトラーまでいた。訳注１３で触れたように，プライスはバトラーとクラークの思想に大きな影響を受けたと認めるが，この後二者は非国教徒学院時代のセッカーを介して文通を始めた事実も確かめられる（ODNB）。元来が長老派育ちのセッカーはまず 1708 年にジョリの学院に入るが幻滅して一年半で去り，ジョーンズの学院に移る前の 1710 年にムーアフィールズ学院でイームズの講義（地理学・幾何学・代数学）を聴いている（Burden 2013, 154, 305）。なお，非国教徒学院全般については林（2012, 75-82）でまとめてみたことがあるが，近年整備が進んでいるロンドン大学クィーンメアリ校のデータベース Dissenting Academies Online に照らして大幅な情報更新が必要である。

かたやベイズはどうか。トマス・ベイズの父ジョシュア（Joshua Bayes, 1671-1746）の同名の父（ベイズの祖父）はサミュエル・ベイズ（Samuel Bayes, 1636-c.81）の甥に当たる。このサミュエルはケンブリッジ大トリニティ・カレッジ卒の牧師で，1662 年の礼拝統一法を契機に国教会を離れて非国教会派の道に進む（Matthews 1934, 40）。同じくケンブリッジ卒のフランクランドが営む学院で教育を受けたジョシュアは，名誉革命後，デフォーとも関わりの深いアンズリ（Samuel Annesley, 1620-96）の導きを受けてロンドンで長老派牧師に叙任された。その息子は 18 世紀最初の年に父の赴任先ハートフォードシアで誕生したようだが，1706 年に父がロンドンの教区担当になると（おそらくは）一緒に移住したものと思われる。ベイズもプライス同様，ロンドンの非国教徒学院でイームズの指導を受けた可能性があり，ベイズとプライスを結び付けたのはイームズとも言われるが（Thomas 1977, 11; Dale 2003, 41），ベイズが受けた教育について確かなことが言えるのは 1719 年にスコットランドのエディンバラ大学に進学して 22 年まで在籍し，牧師見習い（probationer）の資

格を得たことだけである。ジョシュアを助手としたロンドンの牧師テイラー（Christopher Taylor, c.1662-c.1723）が，イングランドやウェールズの非国教会派に働きかけることで学生交流を強化しようとしていたエディンバラ大学長カーステアズ（William Carstares, 1649-1715）と生前に文通していた事実も，ベイズの学歴に関係していた節がある（Dale 2003, 46-57）。ちなみにムーアフィールズ学院におけるイームズの同僚として神学を担当したリッジリ（Thomas Ridgley, 1667-1734）はアバディーン大学キングス・カレッジから神学博士号を得ているが（Burden 2013, 437），これもブリテン南部の非国教徒学院と北部の諸大学との関係の深さを示す好例であろう。その後ベイズは 27 年に長老派牧師に任じられ，父の助手としてロンドンで数年を過ごしたのち，31 年，ケントの温泉街タンブリッジ・ウェルズ（Tunbridge Wells）に礼拝堂付き牧師として赴任する。

当時のタンブリッジ・ウェルズがリゾート地としていかに人気を集めていたかは，デフォー著『大ブリテン全島旅行記』（1724～27 年）を読むとよく分かる。右はオランダ出身の版画家キップ（Johannes Kip, 1653-1719）によるタンブリッジ・ウェルズ全景画であり，ちょうど中央付近に「ウェルズ」こと鉱泉があり，その奥に礼拝堂が，手前に大通りが描かれている（出典は Defoe 1991, 54）。デフォーが訪れた際にはちょうどプリンス・オブ・ウェールズ（のちの国王ジョージ二世）がこの街に滞在中で，あまりに逗留客が多いので宿所を探すのに苦労したという。そして「ここに姿を見せるご婦人方がまさしくこの地の花形であり，鉱泉（Water）を飲むためにウェルズを訪れる，というのは儀礼上のことに過ぎない。何人かは飲むが大半は飲みもせず，健康のために飲む者はまずいない。つまり，社交（Company）と気晴らしとがこの地の主な役割である。他所では何も行うことのない者たちが，タンブリッジでは，何か行うことのある唯一の者たちになるのである」と皮肉混じりに告げる。さらに「賭け事の数々，また洒落男連中について言えば，タンブリッジはこれらに満ち満ちており，純粋な休養のためにこの地にやって来た有名有徳な方々の気晴らしの多くを奪ってしまう。ただし，ひとかどの善人はつねにいたたまれないとは言っても，彼は自分に合った社交仲間を選び抜くことができるし，彼らとなら，心の底から愉快になることもできるだろう」（Defoe 2001, 164-65）。一見してモラリスト風の小言を並べただけのようでもあるが，すぐ後の箇所では，タンブリッジ・ウェルズの空気の清潔さや物産の良質低廉さが称えられる。さらに読み進めると，この街の怪しげな魅力が次のように総括される。「要するにタンブリッジは，人生の至福に資するものを，すなわち男女問わず完全に幸せにするものを何一つ欠いていない。ただし彼らがお金を持っていることが，つねに条件である。お金のない者は何者でもなくなってしまうのはタンブリッジでも他所でも変わらない。ポケットの中身が少なくなってきたら，残りについて考えるのは止めて去るべきである。それ以上滞在したところで，気晴らしなど得られなくなるだろうから」（*Ibid.*, 165）。この最後のひと言はデフォー自身の経験に裏打ちされている。「私は自分が述べた通りの理由でタンブリッジを離れた。私と同じ状況に置かれた他人はなぜこの街を離れたほうがよいかということだ。つまり私は持ち金をほぼすべて擦ってしまったのだ。道中入用の時のために所持していた信用手形も，その時は持ち合わせがなかった」（*Ibid.*, 166）。競馬すら嫌うデフォーらしからぬ（*Ibid.*, 117-18），いわゆる落ちだが，ベイズが礼拝堂から見守った街の姿を活き活きと伝える描写には違いない。モートン（林 2021 訳注



Tunbridge Wells
(engraving by J. Kip)

３）の非国教徒学院に学んだデフォーのような「誠実な非国教徒」さえ虜にする何かが，この街には存在したことになる。以下では，この「何か」について考えてみたい。

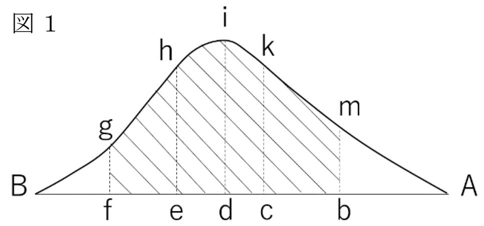
デフォーが「賭け事」と呼んでいる事柄が，この場合の鍵になるだろう。リゾート地としてのタンブリッジ・ウェルズの街で日常的に催されていた事柄を，まさに日々，間断なく眺めるという経験を続けていたはずのベイズは，そこに何を見ていただろうか。彼の原論文すなわち「偶然論における一問題の解法」のうちにそれを探ってみよう。ここでは，プライスが補遺の冒頭で「あらゆる場合について直接的かつ完全な解法を与える」とした規則１のみを例に取る。

規則１を理解するためには，原論文の命題７から順に見ていくとよい。ある出来事の発生確率をａ，失敗確率をｂとしたとき，ｐ＋ｑ（＝ｎ）回の試行においてこの出来事がｐ回起こりｑ回起こらない確率は，二項定理を用いて

$$(a+b)^n = \sum_{q=0}^{n} \binom{n}{q} a^p b^q$$

と表すことができる。すべてのｑ（ｐ）について確率を合計すれば１である。続いて命題８を見よう。ａ＝ｘ，ｂ＝ｒと置き，ｘは線分ＡＢ上の任意の点と点Ａとの距離がＡＢの長さに対して持つ比率を，ｒはその任意の点と点Ｂとの距離が同じくＡＢに対して持つ比率を示すとする。このときｘ＋ｒ＝１となる。ここで二項係数の記号Ｅを用いて，

図１



$$y = Ex^p r^q$$

と表す。このｙは，任意のｘ（ｒ）について当該出来事がｐ回起こりｑ回起こらない確率であり，図１のＡＢに垂直な縦座標の大きさに相当する。すべてのｘとｒ（＝１－ｘ）についてｙを足し合わせたものが図１の山型の面積である。そしてこの山型の面積がＡＢ＝１を一辺とする正方形の面積（１×１＝１）に対して持つ比率こそ，任意のｘについて当該出来事がｐ回起こりｑ回起こらない確率である。このときｐとｑには数字をそれぞれ一つ代入すべきことに注意されたい。

命題９はプライスの言う「逆の問題」への解法を示唆する。すなわち，ある出来事が過去ｎ回の試行においてｐ回発生しｑ回失敗した事実だけが知られているとき，この同じ出来事が次の一回の試行において起こる確率をどう見積もればよいかが，明らかにされる。経験データに基づいてｐとｑに一つずつ数字を入れることは，二項係数を一つに固定することを意味する。この状態のままｘの値を０から１まで動かしていくときに，次の一回の発生確率がＡｂ／ＡＢとＡｆ／ＡＢという二つの，プライスが原論文の序文で用いた表現を借りれば「指定確率度合」（林 2021, 71-72）の間に収まる確率は，図１において

$$\frac{\text{fghimb の面積}}{\text{正方形の面積}} \div \frac{\text{山型の面積}}{\text{正方形の面積}} = \frac{\text{fghimb の面積}}{\text{山型の面積}}$$

である。山型の面積を正方形の面積で割ることで，一定の二項係数のもとでの任意のｘにおける当該出来事の発生確率が分かる。fghimb を正方形で割るだけでは，二項係数が一定と経験的に分かっているにもかかわらず，その情報を無視するかたちになるため確率の値が不当に小さくなる。その点を是正するために，左辺のような式が組まれている。

命題１０では実践的な計算法が示され，それがそのまま規則１まで連なっているので，以下では具体的な数字を上の諸式に代入して，実際に計算しておこう。過去の試行回数を２回として立式すると

$$(\mathrm{x}+\mathrm{r})^2=\sum_{\mathrm{q}=0}^{2}\binom{2}{\mathrm{q}}\mathrm{x}^{\mathrm{p}}(1-\mathrm{x})^{\mathrm{q}}$$

であり，これは当該出来事の発生（失敗）回数が０（２）回，１（１）回，２（０）回のすべての場合において，０≦ｘ≦１を条件とする任意の（したがって全）ｘについての確率を総和しているため，この式が示す値は１になる。しかしいま，発生回数と失敗回数が１回ずつだと分かっているとすれば，ｐ＝ｑ＝１より二項係数Ｅ＝２に固定される。したがって先に見たｙについての式を立てると

$$\mathrm{y}=\binom{2}{1}\mathrm{x}^1(1-\mathrm{x})^1=2(\mathrm{x}-\mathrm{x}^2)$$

となり，この式が図１における山型の稜線を表すと分かる。山型の面積を求めるには積分が使える。すなわち，上記の範囲のすべてのｘにおけるｙの値を足し合わせるので，この合計値をＹと置けば

$$\mathrm{Y}=2\int_0^1(\mathrm{x}-\mathrm{x}^2)\,\mathrm{dx}=2\times\left[\frac{\mathrm{x}^2}{2}-\frac{\mathrm{x}^3}{3}\right]_0^1=2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$$

と求まる。よって過去２回の試行において当該出来事が１回しか起こらない確率は３分の１である。では二つの異なるｘの値を指定した場合に，次の一回の試行においてその出来事が発生する確率がこれら二つの確率の間にあると見積もってよい蓋然性は，どの程度だろうか。

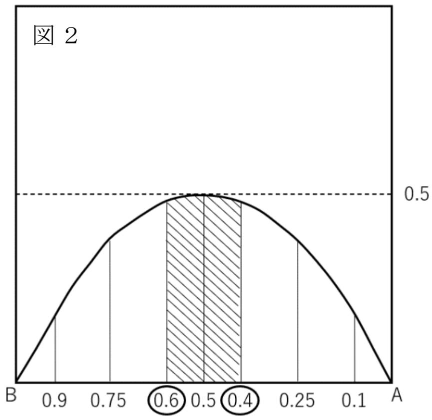


図２

右の図２は図１と実質的には同じものだが，上式に対応させてより精確に描いてある。ｘに０．４と０．６を入れて斜線部の面積（δと置く）を同様に積分で求め，それを山型の面積で除せば，求める値が現れる。すなわち，δが山型の面積に対して持つ比率こそ，ベイズが「私の推測が正しい公算」と述べているところの（林 2021, 87），前述した蓋然性である。これを求める方法を示したのが規則１で，それは以下のような式を立てて計算することと同じである。

$$\delta=2\int_{0.4}^{0.6}(\mathrm{x}-\mathrm{x}^2)\,\mathrm{dx}=2\times\left[\frac{\mathrm{x}^2}{2}-\frac{\mathrm{x}^3}{3}\right]_{0.4}^{0.6}=2\left(\frac{135-54}{750}-\frac{60-16}{750}\right)=\frac{74}{750}$$

これを山型の面積である３分の１で割れば，蓋然性は$\frac{74}{750}$×３＝０．２９６（約３０％）と求まる。こうして，主観的にｘの幅を設定した場合に，自らの見積もりがどの程度正しいかを定量的に述べる方法が示された。この蓋然性は自身が任意に指定した確率の見積もりが正しいと言える確率を意味しているがゆえに，ベイズの方法は主観確率であると同時に「確率の確率」を求めるメタな発想に立つものと分かる。この方法は確率と幾何学的面積を組み合わせるという発想から生まれており，同時代のフランスに「ビュフォンの針」の例があるとはいえ（トドハンター2017, 295-96），ケインズが称える通り，その「価値と独創性」はかなり大きいだろう。ケインズは同時に，ベイズの「真に論理的な」飛躍なき叙述の組み立てに賛辞を送っているが（Keynes 1973, 193-94／訳 201-02），この点も，プライスのそれともども見習うべきであろう。

以上が，ベイズの原論文のうち最も重要と言える規則１の導出過程の確認である。規則２（と３）については，すでに述べた通りプライスによる証明を見なければならないが，ここでは繰り返さない。さて最後に，先に触れた鍵を想起してもらうとしよう。いま見たベイズの方法と，賭け事とが，いかなる関係にあるのか。それはベイズが，ｎ回の試行におけるｐとｑの組み合わせを，すべてのｐについて同等に起こり得ることと見なしているという事実をふまえれば，はっきりする。具体的に述べれば，ｎ＝２のとき，すでに見たようにｐ＝ｑ＝１となる確率は３分の１だが，ｐ＝０かつｑ＝２の確率も３分の１，ｐ＝２かつｑ＝０の確率もまた３分の１である。同様にｎ＝３のとき，ｐ＝０でもｐ＝１でもｐ＝２でもｐ＝３でも，先の山型の面積が正方形の面積に対して持つ比率は４分の１ずつになる。定式化すれば（ｎ＋１）×山型の面積＝１である。したがって，ｎ＝３のとき，ｐ＝０という過去の経験を持つ人と，ｐ＝３という過去の経験を持つ人とが，ｘの設定幅を共通にして次の一回の成功に関する自身の判断の蓋然性を評価する場合，両者の評価にまるで差が生じないという，一見して奇妙な状況が生まれる。過去に一度も成功したことのない前者が，過去の試行すべてにおいて成功を収め続けてきた後者と，自身の判断について同じだけの信念を懐いてよいのか。この疑問に対して懐いてよいと返せるところが，賭け事を眺めてきたベイズならではの直観なのだろう。永遠に勝ち続けることも負け続けることもなく，勝ちが不思議と連続することもあれば，負けが込むこともある。それがタンブリッジ・ウェルズの経験則だったのではないか。ひと言で表現すれば，それは「塞翁が馬」である。奇蹟をめぐってヒュームと対峙したプライスの立論も，すでに確認したように，証言においてたとえ何度ネガが続こうと，それがポジに反転する可能性は決して些少ではないという前提をベイズと共有している。そしてモーガンに拠りつつ見た 1760 年代初めの個人的苦境に思いを致すとき，それが自身の務めに誠実であるがゆえの苦衷であったとしたならば，亡き年長の友の遺した「偶然論における一問題の解法」こそが，学問的意義を超えて，プライスの心そのものを救ったのではないかと改めて思えてくる。

参考文献

Barnard, G. A. 1958. Thomas Bayes's Essay towards Solving a Problem in The Doctrine of Chances. *Biometrika*, vol. 45, pts. 3-4, pp. 293-315.

Bayes, T. [1763] 1764a. A Letter from the late Reverend Mr. Thomas Bayes, F. R. S. to John Canton, M. A. and F. R. S. *Philosophical Transactions, Giving Some Account of the Present Undertakings, Studies, and Labours, of the Ingenious, in Many Considerable Parts of the World*, vol. 53, pp. 269-271. London.

――. [1763] 1764b. An Essay towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances. By the Late Rev. Mr. Bayes, F.R.S. Communicated by Mr. Price, in a Letter to John Canton, A.M. F.R.S. *Philosophical Transactions, Giving Some Account of the Present Undertakings, Studies, and Labours, of the Ingenious, in Many Considerable Parts of the World*, vol. 53, pp. 370-418. London.

Burden, M. A. 2013. *Biographical Dictionary of Tutors at the Dissenter's Private Academies, 1660-1729*. Dr Williams's Centre for Dissenting Studies.

Dale, A. I. 1999. *A History of Inverse Probability: From Thomas Bayes to Karl Pearson*, 2nd ed. Springer.

――. 2003. *Most Honourable Remembrance: The Life and Work of Thomas Bayes*. Springer.

Defoe, D. [1724-27] 2001. *A Tour thro' the Whole Island of Great Britain*, edited by J. McVeagh. 3 vols. Pickering and Chatto.

——. 1991. *A Tour through the Whole Island of Great Britain*, abridged and edited by P. N. Furbank and W. R. Owens. Yale University Press.

Deming, W. E. (ed) 1940. *Facsimiles of Two Papers by Bayes*. The Graduate School, The Department of Agriculture, Washington.

Dissenting Academies Online <https://www.qmul.ac.uk/sed/religionandliterature/dissenting-academies/dissenting-academies-online/>

Hald, A. 1990. Evaluations of the Beta Probability Integral by Bayes and Price. *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 41, no. 2, pp. 139-56.

Hume, D. [1739-40] 1978. *A Treatise of Human Nature*, edited by L. A. Selby-Bigge. 2nd ed. Clarendon Press. 木曾好能訳『人間本性論 第一巻 知性について』法政大学出版局, 2012.

——. 1748. *Philosophical Essays concerning Human Understanding*. London. 斎藤茂雄・一ノ瀬正樹訳『人間知性研究』法政大学出版局, 2011.

Keynes, J. M. [1921] 1973. *A Treatise on Probability*. St. Martin's Press and Royal Economic Society. 佐藤隆三訳『確率論』東洋経済新報社, 2010.

Matthews, A. G. 1934. *Calamy Revised: Being a Revision of Edmund Calamy's Account of the Ministers and Others Ejected and Silenced, 1660-2*. Clarendon Press.

Moivre, A. de 1756. *The Doctrine of Chances: Or, a Method of Calculating the Probabilities of Events in Play*, 3rd ed. London.

Morgan, W. 1815. *Memoirs of the Life of the Rev. Richard Price, D.D. F.R.S*. London.

Norton, D. F and M. J. Norton. 1996. *The David Hume Library*. Edinburgh Bibliographical Society,

Price, R. [1764] 1765. A Demonstration of the Second Rule in the Essay towards the Solution of a Problem in the Doctrine of Chances, published in the Philosophical Transactions, Vol. LIII. Communicated by the Rev. Mr. Richard Price, in a Letter to Mr. John Canton, M. A. F.R.S. *Philosophical Transactions, Giving Some Account of the Present Undertakings, Studies, and Labours, of the Ingenious, in Many Considerable Parts of the World*, vol. 54, pp. 296-325. London.

——. 1767. *Four Dissertations. I. On Providence. II. On Prayer. III. On the Reasons for Expecting that Virtuous Men shall Meet after Death in a State of Happiness. IV. On the Importance of Christianity, the Nature of Historical Evidence, and Miracles*. London.

——. 1784. *Observations on the Importance of the American Revolution, and the Means of Making it a Benefit to the World*. London.

——. 1983. *The Correspondence of Richard Price, vol. I: July 1748-March 1778*, edited by D. O. Thomas and Bernard Peach. Duke University Press.

Simpson, T. 1740. *The Nature and Laws of Chance*. [London:] Edward Cave.

Thomas, D. O. 1977. *The Honest Mind: The Thought and Work of Richard Price*. Clarendon Press.

トドハンター, I. [1865] 2017. 安藤洋美訳『確率論史：パスカルからラプラスの時代までの数学史の一断面』現代数学社.

フィッシャー, R. A. [1959] 1962. 渋谷政昭・竹内啓訳『統計的方法と科学的推論』岩波書店.

ラプラス [1814] 1997. 内井惣七訳『確率の哲学的試論』岩波文庫.

安藤洋美 1976.「トマス・ベイズと『偶然論における一問題を解くための試論』について」『桃山学院大学人文科学研究』第 12 巻第 1 号.

林直樹 2012.『デフォーとイングランド啓蒙』京都大学学術出版会.

——. 2021.「ベイズ「偶然論における一問題の解法」（１）」『尾道市立大学経済情報論集』第 21 巻第 1 号.