

ベイズ「偶然論における一問題の解法」(1)

Bayes, An Essay towards Solving a Problem
in the Doctrine of Chances (1)

林 直 樹

ベイズ「偶然論における一問題の解法」(1)

林 直 樹

I はじめに

本稿は、イングランド長老派の牧師トマス・ベイズ (Thomas Bayes, 1701?-61) が遺した原稿を、ウェールズ出身で同じく非国教会系牧師としてイングランドで活躍したリチャード・プライス (Richard Price, 1723-91) が編集し、カントン (John Canton, 1718-72) 宛書簡のかたちで『王立協会紀要』第 53 巻に掲載したところの、論文「偶然論における一問題の解法」を全訳し、訳注を付したものである。ただし紙幅の都合等により前編と後編に分けた。以下に示すのは前編のほうになる。

解題は後編に付すこととし、ここで著者ベイズの伝記を詳らかにすることはしないが、ベイズとプライスの二人が年齢の懸隔にも関わらず親しい友だったこと、すでに王立協会会員としてベンジャミン・フランクリンと電気の研究で競い合い、同協会コプリー・メダル (Copley Medal) も獲得した著名人であったカントンとプライスの間にも親密な交流があったことが、ベイズの遺稿が日の目を見るきっかけになった事実のみを、記しておく。ちなみにカントンはアバディーン大学キングス・カレッジで修士号を得ている (*Oxford Dictionary of National Biography*; 以下 ODNB)。こうした事実が本稿において持つ含みの広がりを想像しながら、18 世紀の文脈の中で展開される「ベイジアン」の始祖の言説とそれを取り巻く人間模様としての思想史を、存分に楽しんでいただけるように願う。

なお、ベイズ (プライス編) の論文は、プライス著の序文 (書簡体) を除き、次の通りの諸項目から構成されている。前編は命題 10 のすぐ後に続く規則 1 までの全訳である。規則 2 から補遺までの訳文とその検討は後編に収録する。

問題 (PROBLEM)	補題 1 (Lem. 1)
第 I 部 (SECTION I)	補題 2 (Lem. 2)
定義 (DEFINITION)	命題 8 (PROP. 8)
命題 1 (PROP. 1)	証明 (DEMONSTRATION)
命題 2 (PROP. 2)	付論 (Cor.)
命題 3 (PROP. 3)	命題 9 (PROP. 9)
命題 4 (PROP. 4)	注釈 (SCHOLIUM)
命題 5 (PROP. 5)	付論 (Cor.)
命題 6 (PROP. 6)	命題 10 (PROP. 10)
命題 7 (PROP. 7)	規則 1 (RULE 1)
第 II 部 (SECTION II)	規則 2 (RULE 2)
公準 1 (Postulate. 1)	規則 3 (RULE 3)
公準 2 ([Postulate.] 2)	補遺 (An APPENDIX)

II ベイズ「偶然論における一問題の解法」(前編)

凡例

- ① 以下は、トマス・ベイズ著 *An Essay towards solving a Problem in the Doctrine of Chances* (1763 年) のうち、編者プライスが著者自身による本論として提示した部分 (前編) の全訳である。カントン宛書簡のかたちをとったプライスによる序文、およびプライスが上記本論に適宜付した注記 (原注) もすべて訳出した。なお、補遺をはじめ、プライスがベイズによる本論の続きに直接書き加えた本文部分とそれへの注記については、後編と題した別稿において訳出する。
- ② 底本には、英国王立協会の公式ウェブサイト (<https://royalsociety.org>) から入手可能な『王立協会紀要』 *Philosophical Transactions* の電子版資料所収の原典、すなわち Bayes 1764 を用いた。必要に応じて Barnard 1958 と Dale 2003 さらに Price 1983 に再録された原文も参照した。
- ③ 原注はローマ数字の小文字で、訳注はアラビア数字で示した。
- ④ 訳文に添えた図表は原典をもとに訳者(林)が作成した。したがって原本の寸分違わぬコピーではない。
- ⑤ 訳文中の括弧は次の四種類に分かれる。[] は原語を添える場合に用いる。〈 〉 は囲んだ訳語の原語がイタリック体であることを示す。[] は短い訳注および補足である。() は原典で用いられている箇所にそのまま用いている。

偶然論における一問題の解法

故王立協会会員ベイズ著

王立協会会員ジョン・カントン宛の手紙のかたちでプライス氏が報告

1763 年 12 月 23 日に読み上げ

拝啓、私たちの亡き友ベイズ氏の遺稿の中から私が見つけ出した論考を、貴殿に送ります。私の見解では、この論考には大きな価値があり、保存されるに十分値するものです。貴殿ならすぐに、経験哲学 [Experimental philosophy] がこの論考のテーマに惹きつけられていると言ってもよいくらいだと、お気づきになるでしょう。それゆえ、この論考について王立協会にお伝えしない手はないと思わせるだけの、特段の理由が存在するように思われるのです。

ご存じのように、彼は、王立協会という輝かしい協会の会員としての榮譽を得ており、大変有能な数学者として、多くの会員たちにとっても尊敬されていました。彼がこの論考のために書いた序文の中で、このテーマに取り組んだ際の最初の狙い [design] は以下のような点にあったと

彼は述べています。それは、所与の状況が存在し、それと同一の状況のもとでは、ある出来事がある回数は起きたことがあり、かつ別の回数は起きたことがないということ以外を私たちが何も知らないと仮定したとき、その状況下においてある出来事が起こる確率 [probability] に関して私たちが判断する方法を見出すことです。私たちが偶然 [chance] について見積もる際に従うべき規則として、全く未知の出来事の発生確率が、その出来事をめぐるあらゆる経験 [experiments] に先立つところの、二つの何らかの指定確率度合 [any two named degrees of probability] の間に存在している、という規則を見出すことができれば、上記の点はそれほど困難なことではないと気がついたと、彼はさらに続けて述べています。この規則は均等な差分を有する二つの何らかの度合の間に偶然は存在すると仮定することに他ならないと、彼の目には映ったのでした。そしてこの点さえ認められれば、残された部分は、偶然論 [doctrine of chances] に関して採用される一般的方法で容易に計算がなされるはずなのでした。こうして私は彼の遺稿の中に、上記の問題の、上記の手法による、きわめて独創的な解法を発見したというわけです。しかし彼はその後、自らの主張の〈前提条件 [postulate]〉が必ずしもすべての人々から合理的と見なされるわけではないことを考慮し、この問題の解法が含まれると彼が考える命題を別のかたちで提示する道を選びました。そして、論争の余地のある事柄を自身の数学的論証に引き入れるのではなく、彼がそう考える理由を追記する〈注釈 [scholium]〉のかたちで、それを行いました。貴殿ならすぐお分かりになると思いますが、以上が、この論考で彼が追求した方法なのです。

分別のある人はみな、いま述べた問題が決して、偶然論上の単なる好奇心ゆえの思弁に止まるものではなく、過去の事実に関する、そして今後起こりそうな事柄に関する私たちの推論のすべてに確実な基礎を与えるために解決されねばならない問題であると、お気づきになるでしょう。共通感覚 [common sense] は実際、先立つ事例の数々においてある一定の原因ないし行動の結果であった事柄の観測から、別のときにその原因ないし行動の結果がどうなりそうかを誰でも判断できること、そしてまた、推論の結論を支持するのに必要な経験の数が多くなればなるほど、それだけ考慮に入れなければならない前提 [reason] も増えていくことを、十分に示してくれています。しかし、前述の問題について特に議論せずにいるかぎり、どの程度まで繰り返された経験ならば結論を確証してくれるのかを私たちが少なくとも厳密には決定できないことは、間違いありません。したがって〈類推による [analogical]〉〈帰納法的な [inductive]〉推論の強みを明確化しようとする人なら誰しもが、この問題を考慮しなければならないのです。この推論は、事実として何度か私たちに確信させ、別の何度かはそうさせないということ以外、現在の私たちは何も知らないように思われる事柄に関わるものです。またそれは私たちに多数の真実を告げる手段であり、それがなければ私たちは無知でいるに違いないものですので、それはきっと数多の誤謬の源泉ではありますが、この種の推論が私たちに及ぼす効力がより明瞭かつ明確に理解されるならば、そのいくらかは回避されることになるだろうと思われます。

以上の考察から分かる通り、この論考で究明された問題は、好奇心をそそるだけでなく実際

においても重要です。管見のかぎり、これは過去に解決されたことが一度もない問題であると言っても過言ではないでしょう。もっとも、数学のこの分野の偉大なる改良者であるド・モアブル氏は、著書『偶然の法則』の中でⁱ⁾、ベルヌーイをさらに厳密化したうえで、何らかの出来事に関して非常に多数の試行が行われる場合に、そうした複数回の試行においてその出来事が起こるだろう回数の、起こらないだろう回数に対する比率が、ただ一回の試行においてそれが起こる確率の起こらない確率に対する比率と、わずかな設定幅の範囲内でしか異ならない確率を見出す規則を提示しました。しかし私の知るかぎりでは、これとは逆の問題の解法を導出した人は一人もおりません。すなわち、「未知の出来事が起こった回数と起こらなかった回数を所与としたとき、その出来事が起こる確率が二つの何らかの指定確率度合の間のどこかに存在している公算 [chance] を見出す」という問題です。ド・モアブル氏の業績はこの点の考慮を不要にするほどにまで十分だとは言えません。特にド・モアブル氏が提示した規則は、無限大の試行回数を仮定した場合を除き、厳密には正確とは見なされないものだからです。したがって、実践上当てにしてよい程度にまで正確なものにしようとする、試行回数はいったいどれほど多くなければならないのかは、不明確なままなのです。

原注 i) ド・モアブル氏の『偶然論』243 頁などを参照。彼は規則の証明を割愛したが、その後シンプソン氏が『偶然の性質と法則』論の結びで証明を補った¹⁾。

ド・モアブル氏は、自身が解き明かした問題を、偶然というテーマについて提起された中で最も困難なものだと述べています。彼は非常に重要な目的に対して自身の解法を応用し、そうすることで、数学における偶然論は些細な重要性しか持たず、真摯な研究の中に居場所はない、などと嫌味を口にしてきた者たちがいかに誤っているかを、世に示しましたⁱⁱ⁾。ここで私が言う目的とは、私たちが、事物の構成の中に、それに従って出来事が起こる不易法則が存在すると信じる理由は何か、そしてそれゆえに、世界の枠組みは知的原因 [an intelligent cause] の賢慮と力能の結果であるに違いないと信じる理由は何かを、示すことです。そしてそれにより、神の存在の究極的諸原因 [final causes] から引き出された主張を確かなものとするということです。この論考で解決された逆問題が、この目的に対していっそう直接的に応用可能であることは、すぐに分かるでしょう。なぜなら、何らかの特定の順序ないし再現性を持つ出来事のあらゆる場合について、そうした再現性や順序が偶然の不規則性からではなく、安定的原因や内在的規則性から導出されると考える理由は何かを、明確かつ正確に、私たちに示してくれるからです。

原注 ii) ド・モアブル『偶然論』252 頁などを参照²⁾。

この論考の最後の二つの規則は、そうした安定的原因や内在的規則性からの演繹なしに与え

られています。私がそうすることを選んだのは、その演繹に多くの紙幅を必要とし、論考を過度に膨れ上がらせてしまうため、そしてまた、これらの規則にかなりの有用性があるとは言っても、待望される程度まで完全には、それらが与えられたそもそもの目的に依拠してはいないためです。それでも、お伝えするにふさわしいと考えられるならば、それらはいつ世に出されてもよいものです。いくつかの箇所に私は短い注記を施しましたし、全体に対する追記として、本論考中の諸規則を特殊な場合のいくつかに応用し、問題の性質に関するより明瞭な考えを伝えようとしただけでなく、問題の解法がどの程度まで通用するかを示そうとしました。

貴殿のお時間をずいぶんと頂戴してしまいましたが、いまこうしてお送りしたものに、隅から隅まで貴殿が目を通してくださることを、私は期待せずにはられません。計算のいくつか、特に補遺 [Appendix]における計算に関しては、誰であっても、かなりの骨折りなくしては行えないでしょう。そうした計算に私は細心の注意を払いましたので、重大な間違いは一つもないと信じます。ですがもし、何らかの計算間違いがありましたら、その責めは私一人に帰すべきものです。

ペイズ氏は、偶然の一般法則の簡潔な証明から始めるのがよいと考えました。そうする理由は、彼が序文で述べているように、彼の主張が依拠する原理を読者がどこか別の場所で探す労を省くためだけでなく、そうした原理を明瞭に証明するためには読者をどこへ誘えばよいかが、分からなかったからでした。また彼は、〈偶然〉や〈確率〉という言葉に彼が与えた特殊な定義をめぐる弁明も行いました。その際の彼の狙いは、語義に関する論争のすべてを断ち切ることでした。通常言語における言葉というものは、異なる見解を有する人々によって異なる意味合いで使用されつつ、〈過去〉あるいは〈将来〉の事実にも適用されています。しかし、どれほど多様な意味を帯びようとも、何らかの〈過去の〉事実の真実性に依存する、あるいは、何らかの〈将来の〉出来事の発生に依存する期待は、その事実が真実に近づけば近づくほど、ないしはその出来事が起こりやすくなればなるほど、その分だけよりいっそう値が大きくなると見なされるべきことを、(彼の見立てによれば)すべての人が認めるでしょう。それゆえ彼は、〈確率〉という言葉に適切な意味を付与する代わりに、この言葉が使用されるすべての場合について、その適切な計量手段であるとすべての人が認めるものを、提示したのでした。さて、この手紙を締めくくらねばならないときが来たようです。様々な発見や改良に関し、経験哲学は貴殿に負うところ大であります。したがって私は、以下の論考と補遺を貴殿に直接お送りするのが最適であると考えずにはられません。貴殿の研究がさらに多くの成功に恵まれ、貴殿が一つひとつの価値ある祝福を享受なさいますことを、心から願っております。

1763年11月10日 ニューイントングリーン³⁾

貴殿の慎ましい僕

リチャード・プライス

問題

未知の出来事が起こった回数と起こらなかった回数を〈所与としよう〉。ただ一回の試行でその出来事が起こる確率が、指定できる二つの何らかの確率度合の間のどこかに存在する公算を〈求めよ〉。

第 I 部

定義 1：複数の出来事について、そのうちの一つが起きた場合、残りが起こりえないのであれば、それぞれの出来事は〈非一貫的 [inconsistent]〉である。

定義 2：一方か、さもなければ他方が発生し、両者が同時に起こることはありえないとき、二つの出来事は〈相反 [contrary]〉している。

定義 3：ある出来事が起こりえないとき、あるいは同じことになるが、それと相反する出来事が起きたとき、その出来事は〈失敗する [fail]〉と言われる。

定義 4：ある出来事が起こったか、あるいは失敗したとき、その出来事は決定された [be determined] と言われる。

定義 5：〈何らかの出来事確率〉は、その出来事の発生に依存する [depending] 期待の算定値と、その出来事の発生を受けて期待される値の間の比率である。

定義 6：〈偶然〉を、私は確率と同じ意味で用いる。

定義 7：複数の出来事のいずれか一つの発生が残りの出来事の発生確率を高めも低めもしないとき、それらの出来事は独立 [independent] している。

命題 1

複数の出来事がそれぞれ非一貫的であるとき、どれか一つの出来事の発生確率は、めいめいの出来事確率の和である。

上述したような出来事が三つ存在し、そのうちのどれか一つが発生したとき、私は N を入手すると仮定する。また、最初の出来事、二番目の出来事、三番目の出来事確率は、それぞれ、 $\frac{a}{N}$, $\frac{b}{N}$, $\frac{c}{N}$ であると仮定する。そうすると（確率の定義に従い）最初の出来事から得られる私の期待値は a 、二番目は b 、三番目は c になるだろう。それゆえ、三つすべてから得られる私の期待値は $a + b + c$ であろう。ただし、三つすべてから私が期待できるものの和は、この場合、どれか一つの出来事の発生を受けて N を入手することに対する期待である。それゆえ（定義 5 より）どれか一つの出来事確率は $\frac{a+b+c}{N}$ もしくは $\frac{a}{N} + \frac{b}{N} + \frac{c}{N}$ である。めいめいの出来事確率の和 [に等しい]。

付論 三つの出来事のどれか一つが起こることが確実である場合、 $a + b + c = N$ である。なぜならば、この場合、すべての期待を合わせると N を入手するという一定の期待に達するの

だから、それらの値を合算すると N に等しくならねばならないからである。そしてこのことから明らかなのは、ある出来事の失敗（またはその相反）確率に加算された、その出来事の確率が、対等比 [the ratio of equality] [すなわち $1/1$] となることは明らかである。なぜならば、二つの非一貫的な出来事が存在するとき、そのうちの一つが必然的に起こるからである。それゆえ、ある出来事の確率が $\frac{P}{N}$ であれば、その失敗確率は $\frac{N-P}{N}$ になるだろう。

命題 2

ある人が、ある出来事の発生に依存する期待を抱いている場合、その出来事の確率の、その失敗確率に対する比は、その出来事が失敗する場合の彼の損失が、その出来事が起こる場合の彼の利得に対して持つ比に相当する。

ある人が N を入手する期待を抱いており、その N が、確率が $\frac{P}{N}$ の出来事に依存していると仮定しよう。そうすると（定義 5 に従い）彼の期待値は P であり、したがってその出来事が失敗する場合には、彼は P を失う。そしてその出来事が起こる場合には、彼は N を入手するが、彼の期待 $[P]$ はしぼむ。それゆえに、彼の利得 [gain] は $N - P$ である。同様に、その出来事の確率は $\frac{P}{N}$ であるから、その失敗確率は（命題 1 の付論に従い） $\frac{N-P}{N}$ である。だが $\frac{P}{N}$ の $\frac{N-P}{N}$ に対する比は P の $N - P$ に対する比に相当するのであって、これはすなわち、その出来事の確率の、その出来事の失敗確率に対する比であり、それは、その出来事が失敗する場合の彼の損失 $[P]$ が、その出来事が起こる場合の彼の利得 $[N - P]$ に対して持つ比に相当する。

命題 3

二つの連続した出来事が双方ともに起こる確率は、最初の出来事の確率と、最初の出来事の発生を仮定したうでの二番目の出来事の確率との、複比 [相乗比] である。

双方の出来事が起こる場合、私は N を入手し、かつ、双方が起こるだろう確率は $\frac{P}{N}$ であり、かつ、最初の出来事が起こるだろう確率は $\frac{a}{N}$ であり（したがって最初の出来事が起こらない確率は $\frac{N-a}{N}$ であり）、かつ、最初の出来事が起こると仮定したうで二番目の出来事が起こるだろう確率は $\frac{b}{N}$ であると仮定する。そうすると（定義 5 に従い） P が私の期待値となり、この値は仮に最初の出来事が起こるとすれば $b[N \times \frac{b}{N}]$ になるだろう。したがって最初の出来事が起これば、それによる私の利得は $b - P$ であり、最初の出来事が失敗すれば私の損失は P である。それゆえ、先の命題に従い、 $\frac{a}{N}$ の $\frac{N-a}{N}$ に対する比、すなわち a の $N - a$ に対する比は、 P の $b - P$ に対する比に相当する。それゆえ（〈逆比の複合〉より） a の N に対する比は P の b に対する比に相当する⁴⁾。ただし、 P の N に対する比は、 P の b に対する比と b の N に対する比の複合 $[\frac{P}{N} = \frac{P}{b} \times \frac{b}{N}]$ である。それゆえ P の N に対する同様の比は $[\frac{P}{b} = \frac{a}{N}]$ より a の N に対する比と b の N に対する比の複合であり、つまりは、二つの連続した出来事の双方が起こるだろう確率は、最初の出来事の確率と、最初の出来事の発生を仮定したう

えでの二番目の出来事の確率とを複合したものである。

付論 したがって、二つの連続した出来事に関し、その最初の出来事の確率が $\frac{a}{N}$ であり、双方が一緒に起こる確率が $\frac{P}{N}$ である場合、最初の出来事の発生を仮定したうえでの二番目の出来事の確率は $\frac{P}{a}$ である。

命題 4

毎日決定される二つの連続した出来事が存在し、かつ、それぞれの日において二番目の出来事が起こる確率は $\frac{b}{N}$ 、双方の出来事が起こる確率は $\frac{P}{N}$ で、かつ、二番目の出来事が起こる最初の日に双方の出来事が起これば私は N を入手するとした場合、これらの条件より、私が N を獲得する確率は $\frac{P}{b}$ であると言える。仮にそうではないとして、私が N を獲得する確率を $\frac{x}{N}$ とし、かつ、 y の x に対する比が $N - b$ の N に対する比に相当するとしよう。そうすると、私が N を獲得する確率は $\frac{x}{N}$ なので、(定義 1 [正しくは 5] に従い) x が私の [ももとの] 期待値である。そして再度述べると、先の条件に従うかぎり、私が当該初日に N の獲得を期待するには双方の出来事が一緒に発生せねばならないため、その確率は $\frac{P}{N}$ であり、その期待値は P である。同様に、この同時発生が起こらなければ、私はそれ以前の状況における期待を回復させることになるが、それは二番目の出来事の失敗に依存した x を受け取るという期待である。二番目の出来事の失敗確率は(命題 1 の付論より) $\frac{N-b}{N}$ または $\frac{y}{x}$ であるが、それは y の x に対する比が $N - b$ の N に対する比に相当するためである。ゆえに、 x が期待されており、かつそれを獲得する確率が $\frac{y}{x}$ であるので、その期待値は y である。しかし直近のこれら二つの期待の和は、私のももとの期待と明らかに同一のものであり、ももとの期待値は x であるから、 $P + y = x$ である。だが y の x に対する比は $N - b$ の N に対する比に相当する。それゆえ x の P に対する比は N の b に対する比に相当し、 $\frac{x}{N}$ (私が N を獲得する確率) は $\frac{P}{b}$ である⁵⁾。

付論 上の命題で私に期待が与えられた後、そして最初の出来事が起きたかどうか完全に知られる前、私には二番目の出来事が起きたと分かると仮定しよう。このとき私は、自らの期待が依存する出来事が決定されているとだけ推定することができ、私の期待値が以前に比べて大きい、あるいは小さいと見なす理由を何も持たない。なぜなら、仮に期待値が減少したと考える理由があるとしたら、私のそれ以前の状況における事物を回復させることが私にとって合理的ということになるだろうし、このことは、二番目の出来事が起きたと知られるたびに何度となく繰り返されるのであって、明らかに不条理である。またもしあなたが、私は以前よりも大きな期待値を抱くべきだと述べるとしたら、同様の不条理が明らかに生じるだろう。それはなぜかと言えば、事物が、私がそれを放棄することになる条件 [最初の出来事が起こらないこと] に依拠して私に提示された場合には、その事物を拒み、かつ、私の従前の状況においてそれを回復させることが、私にとっては合理的になるだろうからだ。そしてこのことも同様に、

(最初の出来事に関しては何も知られないまま)二番目の出来事が起きたと判明するたびに、幾度となく繰り返される。したがって、二番目の出来事が起きたと判明するか否かにかかわらず、私の期待は以前と同値である、つまりは x と見なされるべきであり、結果として、私が N を獲得する確率は (定義 5 に従い) $\frac{x}{N}$ ないし $\frac{P}{b}$ のままになるⁱⁱⁱ⁾。ただし、二番目の出来事が起きたと判明したのちに私が N を獲得する確率とは、二つの連続した出来事のうち最初のものが、確率についてはすでに知られている二番目の出来事が起きた、と仮定したうえで起きている確率のことである。もっとも、ある出来事が起きた確率は、その出来事が起きていると私が推測する場合に、私がそれを正しく推測している確率と同一である。したがって、次の命題は明白である。

原注 iii) ここで述べられている事柄は、以下のことを考慮すると少しは分かりやすくなるかもしれない。私の期待が依存している出来事がこの命題において示されている方法ですでに決定された場合、二番目の出来事の発生によって失われるはずのものすべてとは、私の従前の状況において回復されるはずの偶然のことである。ただしこの偶然はつねに、私にとって〈好ましい〉のと同程度に〈好ましくない〉ものである。仮に最初の出来事が起こる場合において、この偶然は私にとって〈好ましくない〉わけであるが、それは二番目の出来事が失敗する偶然に等しい。仮に最初の出来事が起こらない場合において、この偶然は私にとって〈好ましい〉わけであるが、それもまた二番目の出来事が失敗する偶然に等しい。したがって、この偶然の喪失は不利益にはなりえない。

命題 5

二つの連続した出来事が存在し、二番目の出来事が起こる確率は $\frac{b}{N}$ 、双方が一緒に起こる確率は $\frac{P}{N}$ であり、かつ、二番目の出来事が起きたことが初めから判明していて、このことから私が最初の出来事もまた起きていると推測する場合、私が正しい確率は $\frac{P}{b}$ である^{iv)}。

原注 iv) この箇所とその前の命題でベイズ氏によって証明された事柄は、次の問いに対する回答と同じである。すなわち、ある出来事が起こるとき、それと同時に決定される別の出来事が一緒に起こる確率はどのくらいか。この場合、出来事の一つが与えられているので、それについての期待は何もないはずである。したがって、双方の出来事の発生に依存する期待値は、それらの一方の出来事の発生に依存する期待値と同じであるに違いない。言い換えれば、二つの出来事のうちの一方が起きたとき、他方の出来事も起こる確率は、この他方の出来事が起こる確率と同じである。この他方の出来事が起こる確率を x と呼ぶとして、初めに与えられた出来事が起こる確率が $\frac{b}{N}$ のとき、双方の出来事が起こる確率は $\frac{P}{N}$ である。なぜなら、 $\frac{P}{N} = \frac{b}{N} \times x$ より、 $x = \frac{P}{b}$ = 上述の命題で述べられた確率、だからである。

命題 6

各々独立した出来事がすべて発生する確率は、各々が起こる確率の複比 [ratio compounded] である。

独立した出来事の性質からすれば、いずれか一つの出来事の発生確率は、その残りの出来事の発生または失敗に左右されず、したがって最初の出来事が起こると仮定したうえで二番目の出来事が起こる確率は、その元来の発生確率と同じである。ただし、何であれ二つの出来事が起こる確率は、最初の出来事の確率と、命題 3 に従って最初の出来事が起こると仮定したうえで二番目の出来事が起こる確率との、複比である。ゆえに、何であれ二つの独立した出来事が双方とも発生する確率は、最初の出来事が起こる確率と二番目の出来事が起こる確率との複比である。同様に、最初の出来事と二番目の出来事を一つの出来事と見なすなら、三つの独立した出来事がすべて発生する確率は、最初の二つの出来事が双方とも発生する確率と三番目の出来事が発生する確率との複比である。このようにしてあなたは、たとえ非常に多くの出来事が存在する場合でも処理を進めることができるし、したがって上記の命題は明らかである。

付論 1 複数の独立した出来事が存在する場合、最初の出来事が起こり二番目の出来事が失敗し、三番目の出来事が失敗し四番目の出来事が起こる、等々の確率は、最初の出来事の発生確率と、二番目の出来事の失敗確率と、三番目の出来事の失敗確率と、四番目の出来事の発生確率等々の、複比である。なぜなら、ある出来事の失敗は、つねに、その反対の発生であると見なせるからである。

付論 2 複数の独立した出来事が存在し、それぞれの出来事の発生確率を a 、失敗確率を b とした場合、最初の出来事が起こり二番目の出来事が失敗し、三番目の出来事が失敗し四番目の出来事が起こる等々の確率は、 $a b b a$ 等々になるだろう。なぜなら、代数の表記法によるならば、 a が何らかの比を、 b が別の何らかの比を示すという場合、 $a b b a$ は a, b, b, a それぞれの比の複比を示すからである。したがって、この付論は上記付論の特殊な例にすぎない。

定義 ある経験事実 [data] の帰結として、ある出来事の発生確率が浮かび上がるという場合、そうした経験事実の帰結としての、その出来事の発生ないし失敗を、私は最初の試行における発生ないし失敗と呼ぶ。またもし同一の経験事実が繰り返し現れる場合、その帰結としての出来事の発生ないし失敗を、二番目の試行における発生ないし失敗と呼ぶ。そして同一の経験事実が繰り返し現れるたびに、これを繰り返す。このことから、非常に多数の異なる試行における同一の出来事の発生ないし失敗が、実際には、互いに正確によく似た多数の明確に独立した出来事の発生ないし失敗であることは、明らかである。

命題 7

各一回の試行において、ある出来事の発生確率が a 、失敗確率が b のとき、その出来事が $p + q$ 回の試行において p 回起こり、かつ q 回失敗する確率は $E a^p b^q$ である。このとき E は、

二項式 $(a + b)^{p+q}$ が展開された際に $a^p b^q$ が現れる項の係数である⁶⁾。

異なる試行における出来事の発生または失敗は、非常に多数の独立した出来事である。それゆえ（命題6の付論2に従い）出来事が最初の試行で発生し、二番目と三番目の試行で失敗し、四番目の試行で発生し、五番目の試行で失敗する、等々（このようにして発生回数が p になり、失敗回数が q になるまで発生と失敗が続く）の確率は $a b b a b$ 等々であり、それは a の回数が p 、 b の回数が q 、つまり $a^p b^q$ になるまで続く。同様にして、別の何らかの特定の順序に従い、出来事が p 回発生し q 回失敗するとあなたが仮定する場合、その確率は $a^p b^q$ である。ただし、異なる順序、つまりそれに従ってある出来事が発生したり失敗したりする順序の数は、 $p + q$ 回の試行において全部で p 回発生し q 回失敗するとしたならば、 a の回数が p であり b の回数が q である際に $a a a a b b b$ が許容する順列の数に等しい。そしてこの数は、二項式 $(a + b)^{p+q}$ が展開された際に $a^p b^q$ が現れる項の係数 E に等しい⁷⁾。したがってこの出来事は、 $p + q$ 回の試行において、 E の数だけ異なる順番で、 p 回発生し q 回失敗するだろうし、これだけ複数の異なる順番でそれが発生および失敗するのは非常に多数の非一貫的な出来事であって、それら各々の確率は $a^p b^q$ である。ゆえに命題1に従えば、 $p + q$ 回の試行で、どのような順番にせよ、その出来事が p 回発生および q 回失敗する確率は $E a^p b^q$ である。

第II部

公準1 正方形のテーブルまたは平面 $A B C D$ が水平に設けられており、球 O または W のどちらが投げられようと、平面のどの部分の上にもそれと均等な他の部分と同等の確率で静止し、かつ、球はこの平面上のどこかで必ず静止するものと仮定しよう。

公準2 球 W が最初に投げられ、球 W が静止する点を通るように線 $o s$ が $A D$ と平行になるように引かれ、 $C D$ とは s で、 $A B$ とは o で交わるとしよう。その後、球 O が $p + q$ 回または n 回投げられ、かつ、球 O がただ一回投げられた後に $A D$ と $o s$ の間で静止している状態を、ただ一回の試行における出来事 M の発生と呼ぶことにしよう。以上の事柄が仮定されたとき、

補題1 点 o が線 $A B$ 上のいずれか二点の間に収まる確率は、その二点間の距離と線 $A B$ の全長との比である。

線 $A B$ 上のいずれか二点を f および b と名づけ、それぞれの点を $A D$ と平行になるように通り、かつ、 F および L でそれぞれ $C D$ と交わる、 $f F$ および $b L$ を描く。そして、長方形 $C f$ 、 $F b$ 、 $L A$ が互いに通約可能 [commensurable] とすれば、各々は同一の均等部分に分割できるわけであるから、分割がなされたうえで球 W が投げられた際、それら複数ある均等部分の上に球 W が静止する確率は、それら均等部分のどれか一つの上で球 W が静止する確率の和に等しい。なぜなら、球 W が平面 $A C$ のそれぞれ異なる部分上で静止するのは、非常に多数の非一貫的な出来事だからである。そして、球 W が互いに均等な部分のどれか一つに静止す

らない。それゆえ、点 o が f と b の間に存在する確率は p_t の AB に対する比率より小さくはなりえず、したがって fc の AB に対する比率よりも大きくなるに違いない (p_t は fc より長いからである)。これと同じ方法をとることでは、上述した確率が fb の AB に対する比率より大きくはなりえず、したがって同一に違いないことを、証明できるのである。

補題 2 球 W が投げられ、線 os が描かれたとき、ただ一回の試行における出来事 M の発生確率は AO の AB に対する比率である。

上述の補題同様、投げられた球 O が Do 上、ないしは AD と so の間のどこかに静止する確率は、 AO の AB に対する比率である。ただし、たった一回の投入で球 O が AD と so の間に静止することは、ただ一回の試行で出来事 M が発生することである。それゆえこの補題は明白である。

命題 8

あなたが、 BA 上に図形 $BghikmA$ を描くとした場合、その性質は次のようなものになる。すなわち (底辺 BA が Ab と Bb のような二つの部分に分割され、分割点 b において垂線が描かれ、この垂線は図形上の m で終点を迎える。 y, x, r はそれぞれ bm, Ab, Bb の AB に対する比率を表しており、 E は、二項式 $(a+b)^{p+q}$ が展開された際に $a^p b^q$ が現れる項の係数であり) $y = E x^p r^q$ である。球 W が投げられる前の時点で、点 o が f と b すなわち線 AB 上のいずれか二点の間に存在し、かつ、 $p+q$ 回の試行において出来事 M が p 回起こり q 回失敗する確率は、 $fghikmb$ 、すなわち線 AB に発する垂線 fg と bm の間に収まるように図形 $BghikmA$ を切り取った部分の、 AB 上の正方形 CA に対する比率であると言える。

証明

そうではないとしよう。つまり、第一に、上記の確率が $fghikmb$ より大きい図形 D の CA に対する比率であるとし、 fb に対する垂線が点 e, d, c を通り、 h, i, k で曲線 $AmigB$ と交わるとしよう。点 d は、 di が線 fb および曲線 $AmigB$ を終点とする垂線のうちで最長となるように位置付けられるとしよう。さらに点 e, d, c は、長方形 bk と ci と ei と fh をすべて合わせたものの $fghikmb$ との差分が、 D と $fghikmb$ との差分より小さくなるように、それぞれ位置付けられるとしよう。曲線方程式の助けを借りれば⁹⁾、また D と図形 $fghikmb$ との差分が与えられれば、以上のことはすべて容易になされう。このとき、 di は fb から立ち上がる垂直縦座標の中で最長であるから、図形の構造から明らかなように、その他の縦座標は各々の側で di から離れれば離れるほど徐々に短くなっていく。したがって eh は、 gf をはじめ ef から立ち上がるどの縦座標よりも長い。

さて、仮に AO が Ae に等しいとすれば、補題 2 に従い、ただ一回の試行における出来事 M の確率は Ae の AB に対する比率になるだろうし、したがって命題 1 の付論に従えば、出来

事 M の失敗確率は $B e$ の $A B$ に対する比率になるだろう。それゆえ、 x と r がそれぞれいま述べた二つの比率であるとした場合、命題 7 に従い、 $p + q$ 回の試行で出来事 M が p 回起こり q 回失敗する確率は $E x^p r^q$ になるだろう。ただし、 x と r はそれぞれ $A e$ の $A B$ に対する比率と $B e$ の $A B$ に対する比率だから、仮に $e h$ の $A B$ に対する比率が y だすると、図形 $A i B$ の構造に従い、 $y = E x^p r^q$ である¹⁰⁾。ゆえに、 $A o$ が $A e$ に等しいとした場合に $p + q$ 回の試行で出来事 M が p 回発生し q 回失敗する確率は y であろうし、それはすなわち $e h$ の $A B$ に対する比率であろう。仮に $A o$ が $A f$ に等しいとした場合あるいは $A e$ と $A f$ の間にその長さが位置づけられるとした場合、いま述べた確率は、同じ理由で、 $e f$ から立ち上がる $f g$ その他の縦座標の $A B$ に対する比率になるだろう。ただし $e f$ から立ち上がる縦座標の中では $e h$ が最長である。ゆえに、その [縦座標が立ち上がる] 点が f と e の間のどこかにあると仮定するかぎり、 $p + q$ 回の試行で出来事 M が p 回起こり q 回失敗する確率は $e h$ の $A B$ に対する比率より大きくはなりえない。このとき、二つの出来事が連続するとして、最初の出来事では点 o が e と f の間に存在し、二番目の出来事では $p + q$ 回の試行で出来事 M が p 回起こり q 回失敗するとした場合、最初の出来事の発生確率は (補題 1 に従い) $e f$ の $A B$ に対する比率であり、また最初の出来事が起こると仮定するかぎりにおいて、いま証明された通り、二番目の出来事の発生確率は $e h$ の $A B$ に対する比率より大きくはなりえない。そしてこのことから明らかなのは、(命題 3 より) 二つの出来事が一緒に起こる確率は $e f$ の $A B$ に対する比と $e h$ の $A B$ に対する比の複比、すなわち $f h$ の $C A$ に対する比率よりも大きくはなりえないことである¹¹⁾。それゆえ、点 o が f と e の間にあり、かつ出来事 M が p 回発生し q 回失敗する確率は、 $f h$ の $C A$ に対する比率より大きくはない。同様にして、点 o が e と d の間にあり、かつ出来事 M が前述の通り発生および失敗する確率は、 $e i$ の $C A$ に対する比率より大きくはなりえない。さらに言えば、点 o が d と c の間にあり、かつ出来事 M が前述の通り発生および失敗する確率は、 $c i$ の $C A$ に対する比率より大きくはなりえない。最後に、点 o が c と b の間にあり、かつ出来事 M が前述の通り発生および失敗する確率は、 $b k$ の $C A$ に対する比率より大きくはなりえない。これら各々の確率すべてを足し合わせると、その和は (命題 1 より) 点 f と b の間のどこかに存在し、かつ、出来事 M が $p + q$ 回の試行で p 回発生し q 回失敗する確率になるであろう。対応する諸比率を同様にすべて足し合わせると、その和は、諸前項の総和が共通の後項に対して有する比率になるだろう。すなわち、 $f h$ と $e i$ と $c i$ と $b k$ の総和が $C A$ に対して有する比率である。この比率は D の $C A$ に対する比率より小さいが、それは D が $f h$ 、 $e i$ 、 $c i$ 、 $b k$ の総和より大きいからである。したがって、点 o が f と b の間に存在し、加えて出来事 M が $p + q$ 回の試行で p 回発生し q 回失敗する確率は、 D の $C A$ に対する比率よりも小さいのであって、同等と見なすことは不合理である。同様の方法で、図形内に $e g$ や $d h$ や $d k$ や $c m$ といったかたちで長方形を書き記すことにより、いま言及した確率は、 $f g h i k m b$ より小さい図形すべてが $C A$ に対して有する比率よりも大きいと、証明

できるだろう。

ゆえに、その確率は $fghikmb$ の CA に対する比率であるに違いない。

付論 球 W が投げられる前、点 o が A と B の間のどこか、すなわち線 AB 上のどこかに存在し、それに加えて出来事 M が $p + q$ 回の試行において p 回発生し q 回失敗する確率は、図形 AiB 全体の CA に対する比率である。もっとも、点 o が AB 上のどこかに存在することは確実である。ゆえに、球 W が投げられる前に出来事 M が $p + q$ 回の試行で p 回発生し q 回失敗する確率は、 AiB の CA に対する比率である。

命題 9

点 o の位置について何かが明らかになる前に、出来事 M が $p + q$ 回の試行ですでに p 回発生し q 回失敗したことが判明しており、したがって点 o が線 AB 上の f と b の二点間に存在し、ただ一回の試行における出来事 M の確率は Ab の AB に対する比率と Af の AB に対する比率の間のどこかにあると、私が推測するとしよう。私が正しい確率は、前述したように、 AB 上の点 f と b それぞれから立ち上げられた垂線によって切り取られた図形 AiB の一定部分の、図形 AiB 全体に対する比率である。

なぜなら、第一に点 o が f と b の間に存在し、第二に出来事 M が $p + q$ 回の試行で p 回発生し q 回失敗するという、連続した二つの出来事が起こる場合に、(命題 8 の付論より)二番目の出来事の元来の確率は AiB の CA に対する比率であり、また (命題 8 より)双方の確率は $fghimb$ の CA に対する比率である。それゆえ (命題 5 より)二番目の出来事が発生したことがまず判明し、それを受けて最初の出来事も発生したと私が推測する場合には、私が正しい確率は $\left[\frac{fghimb}{CA} \times \frac{CA}{AiB}\right]$ より $fghimb$ の AiB に対する比率であるという、この点が証明されるにいったわけである。

付論 同様の事柄が仮定される場合に、出来事 M の確率が、零と、 Ab の AB に対する比率との間のどこかに存在すると私が推測するとしたら、私が正当である偶然は Abm の AiB に対する比率である。

注釈

先の命題から明らかな通り、私がそこで M と呼んでいる出来事の場合、一定回数の試行に関して発生および失敗する回数さえ分かっているれば、それ以上のことは何も知らなくても、その出来事 M の確率がどの辺りにあるかを推測することができるし、そこで触れられている諸面積の大きさを通常の方法に従って計算すれば、その推測が正しく行われる偶然を知ることができる。そしてこれと同一の規則は、試行が実施されるに先立って私たちが何一つ知識を持たない確率に関連付けられた出来事の場合に用いられる規則としてもふさわしいという点は、次の

考察から明らかなように思われる。すなわち、そのような出来事に関して、一定回数の試行においてその出来事が他の出来事より一回でも多く発生すると考える理由がない。なぜなら私は、以上をふまえることで、この出来事の確率は最初不確定であり、その後、この出来事が一定回数の試行において他の出来事より一回でも多く発生すると見なすべき理由を何も提供しないままその確率が決定されるという状況を、正当に推理できるからである。ただし、これはまさに出来事 M の場合である。なぜなら、球 W が投げられる前、つまりただ一回の試行においてこの出来事の確率が決定される前の時点で、(命題 8 の付論より) $p + q$ 回の試行においてその出来事が p 回発生し q 回失敗する確率は $A \text{ i } B$ の CA に対する比率に相当しており、この比率は、 $p + q$ あるいは n という回数を所与としたとき、 p がどのような数になろうとも同一だからである。このことは流率[fluxions]の手法^{v)}を用いて $A \text{ i } B$ の大きさを計算することによっても判明する。したがって、点 o の位置、あるいは n 回の試行における出来事 M の発生回数が明らかになる以前には、その出来事が他の出来事より一回でも多く発生すると考える理由を持ちえないのである。

以上をふまえると、私は次のことを考慮に入れなければならない。すなわち、命題 9 で出来事 M に関して与えられた規則は、試行の実施や観測に先立って私たちが何も知識を持たない確率に関連付けられた出来事について用いられるべき規則でもある、ということである。そしてそのような出来事を、私は未知の出来事と呼ぼう。

付論 以上より、図形 $A \text{ i } B$ における各縦座標は、各縦座標の間で切り取られた図形各部の相対比率を変えないようにしつつ、 E の 1 に対する比率分だけ縮小できると仮定することによって、そしてまた、出来事 M について語られることを未知の出来事に当てはめることによって、ある出来事が実際に発生および失敗する回数からその出来事の確率を見出すための規則を与える、次の命題が得られる。

原注 v) ここで言及されている手法で計算することにより、まもなく第 4 節で次のことが証明されるだろう¹²⁾。 E の 1 に対する比率分だけ縮小された $A \text{ i } B$ の CA に対する比は、1 の $(n + 1) \times E$ に対する比である。ここから次のことが明らかになる。この縮小に先立ち $A \text{ i } B$ の CA に対する比は 1 の $n + 1$ に対する比率でなければならない、 n が所与ならば、それは p がどのような値であろうと恒常的比率だ、ということである。

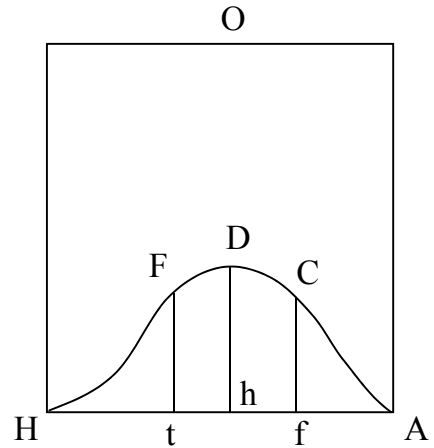
命題 10

[第 1 節] 任意の底辺 AH (図を参照)を持つ図形が描かれ、その方程式が $y = x^p r^q$ であるとき、 y と x と r はそれぞれ、図形の底辺から垂直に立ち上がる縦座標が、また、その縦座標と底辺の起点 A の間で切り取られる底辺の線分が、そして、その縦座標と点 H の間に横たわる底辺の残りの線分が、それらに共通する後項としての底辺に対して保つ比率である。したがっ

て私が述べるのは、未知の出来事が $p + q$ 回の試行において p 回発生し q 回失敗した場合、また底辺 AH 上に任意の二点 f および t をとったうえで、 AH に対して垂直となるように縦座標 fC と tF をあなたが立ち上げる場合、その出来事の確率が Af の AH に対する比率と At の AH に対する比率の間のどこかに存在するという偶然は、上述の図形が二つの縦座標間で切り取られた部分としての $tFCf$ の、底辺 AH から立ち上がった図形 $ACFH$ の全体に対する、比率になるということである。

このことは命題 9、ならびに、先の注釈および付論でなされた考察から明らかである。

さて、先述の規則を実践に落とし込むために、描かれた図形と、底辺に対して立てられた垂直縦座標によって分割されたその図形の各部の、面積値を求めなければならない。この目的を果たすため、 AH を 1、 AH 上の正方形 HO も同様に 1、 Cf は y 、 Af は x 、 Hf は r と置く。 y と x と r は Cf と Af と Hf の AH に対する比率をそれぞれ表すからである。曲線方程式に従えば $y = x^p r^q$ であるとともに¹³⁾、 $(Af + fH = AH$ だから) $r + x = 1$ である。ゆえに $y = x^p \times (1 - x)^q = x^p$



$-q x^{p+1} + q \times \frac{q-1}{2} \times x^{p+2} - q \times \frac{q-1}{2} \times \frac{q-2}{3} \times x^{p+3} + \dots$ である¹⁴⁾。ところで、横座標が x かつ縦座標が x^p ならば、対応する面積は (ニュートン求積法命題 10 事例 1¹⁵⁾ より) $\frac{x^{p+1}}{p+1}$ であり^{vi)}、縦座標が $q x^{p+1}$ ならば、面積は $q \frac{x^{p+2}}{p+2}$ である。残余についても同様である。したがって、横座標が x で縦座標が y すなわち $x^p - q x^{p+1} + \dots$ ならば、対応する面積は $\frac{x^{p+1}}{p+1} - q \times \frac{x^{p+2}}{p+2} + q \times \frac{q-1}{2} \times \frac{x^{p+3}}{p+3} - q \times \frac{q-1}{2} \times \frac{q-2}{3} \times \frac{x^{p+4}}{p+4} + \dots$ である。それゆえ、 $x = Af = \frac{Af}{AH}$ で $y = Cf = \frac{Cf}{AH}$ とすれば、 $ACf = \frac{ACf}{HO} = \frac{x^{p+1}}{p+1} - q \times \frac{x^{p+2}}{p+2} + q \times \frac{q-1}{2} \times \frac{x^{p+3}}{p+3} - \dots$ となる。

原注 vi) この点は、アイザック・ニュートン卿に頼らなくても、非常にはっきりしていることである。すなわち、面積 ACf の流率は $y \dot{x} = x^p \dot{x} - q x^{p+1} \dot{x} + q \times \frac{q-1}{2} x^{p+2} \dot{x} \dots$ であり、流量 [fluent] すなわち面積自体は $\frac{x^{p+1}}{p+1} - q \times \frac{x^{p+2}}{p+2} + q \times \frac{q-1}{2} \times \frac{x^{p+3}}{p+3} \dots$ である¹⁶⁾。

上記の方程式より、仮に q が小さい数ならば、A C f の H O に対する比率の値を見出すことは容易である。また、この値が見出されたのと同様の方法に従えば、H C f の H O に対する比率は $\frac{r^{q+1}}{q+1} - p \times \frac{r^{q+2}}{q+2} + p \times \frac{p-1}{2} \times \frac{r^{q+3}}{q+3} - p \times \frac{p-1}{2} \times \frac{p-2}{3} \times \frac{r^{q+4}}{q+4} \dots$ と分かるだろうし¹⁷⁾、 p が小さければ、この級数はさほど多くの項で構成されないだろうから、活用するに十分ということになる。

第2節 従前と同様の事柄を前提にすると、A C f の H O に対する比率は $\frac{x^{p+1}r^q}{p+1} + \frac{q}{p+1} \times \frac{x^{p+2}r^{q-1}}{p+2} + \frac{q}{p+1} \times \frac{q-1}{p+2} \times \frac{x^{p+3}r^{q-2}}{p+3} + \frac{q}{p+1} \times \frac{q-1}{p+2} \times \frac{q-2}{p+3} \times \frac{x^{p+4}r^{q-3}}{p+4} + \dots + \frac{x^{n+1}}{n+1} \times \frac{q}{p+1} \times \frac{q-1}{p+2} \times \dots \times \frac{1}{n}$ となり、このとき $n = p + q$ である。なぜならこの級数は、第1節で A C f の H O に対する比率の値として定めた $\frac{x^{p+1}}{p+1} - q \times \frac{x^{p+2}}{p+2} \dots$ と同一のものだからである。このことは、前者の級数において r に代えてそれと等値の $1 - x$ を用い、各項を展開しながら x の冪 [powers] に従って各項を順序付けることで、あるいは、もっと直接的に言えば、二つの級数の流率を比較し、 \dot{r} に代えて $-\dot{x}$ を前者の級数に代入することで、容易に分かることだろう^{vii)}。

原注 vii) 最初の級数の流率は $x^p r^q \dot{x} + \frac{q x^{p+1} r^{q-1}}{p+1} \dot{r} + \frac{q x^{p+1} r^{q-1}}{p+1} \dot{x} + q \times \frac{q-1}{p+1} \times \frac{x^{p+2} r^{q-2}}{p+2} \dot{r} + \frac{q}{p+1} \times \frac{q-1}{q+2} \times x^{p+2} r^{q-2} \dot{x} + \frac{q}{p+1} \times \frac{q-1}{p+2} \times \frac{q-3}{p+3} \times x^{p+3} r^{q-3} \dot{r} \dots$ か、あるいは \dot{r} に $-\dot{x}$ を代入して $x^p r^q \dot{x} - \frac{q x^{p+1} r^{q-1}}{p+1} \dot{x} + \frac{q x^{p+1} r^{q-1}}{p+1} \dot{x} - q \times \frac{q-1}{p+1} \times \frac{x^{p+2} r^{q-2}}{p+2} \dot{x} + q \times \frac{q-1}{p+1} \times \frac{x^{p+2} r^{q-2}}{p+2} \dot{x} \dots$ であり、最初の級数に従う各項がみな互いに打ち消し合うため、これは $x^p r^q \dot{x} = x^p \times (1-x)^q \dot{x} = x^p \dot{x} \times (1 - q x + q \times \frac{q-1}{2} x^2 \dots) = x^p \dot{x} - q x^{p+1} \dot{x} + q \times \frac{q-1}{2} x^{p+2} \dot{x} \dots$ 後者の級数すなわち $\frac{x^{p+1}}{p+1} - q \times \frac{x^{p+2}}{p+2} \dots$ の流率、に等しい¹⁸⁾。二つの級数はしたがって同一のものである。

第3節 同様に、H C f の H O に対する比率は $\frac{r^{q+1}x^p}{q+1} + \frac{p}{q+1} \times \frac{r^{q+2}x^{p-1}}{q+2} + \frac{p}{q+1} \times \frac{p-1}{q+2} \times \frac{r^{q+3}x^{p-2}}{q+3} + \dots$ である。

第4節 仮に E を、展開された二項式 $(a + b)^{p+q}$ において $a^p b^q$ が現れる項の係数とするとき、図形 A C F H 全体の H O に対する比率は $\frac{1}{n+1} \times \frac{1}{E}$ となり、このとき $n = p + q$ である。なぜなら、 $A f = A H$ のとき $x = 1$ 、 $r = 0$ であり、したがって、第2節において A

C f の H O に対する比率を表すものとして示された級数のすべての項は最後の項を除きすべて消去され、 $\frac{1}{n+1} \times \frac{q}{p+1} \times \frac{q-1}{p+2} \times \dots \times \frac{1}{n}$ となるからである。ただし E は展開された二項式 $(a+b)^{p+q}$ において $a^p b^q$ が現れる項の係数であるから、それは $\frac{p+1}{q} \times \frac{p+2}{q-1} \times \dots \times \frac{n}{1}$ に等しい¹⁹⁾。また、A f は A H に等しくなるものと仮定されているため、A C f = A C [F] H である。以上のことから本節は明白である。

第5節 A C f の図形 A C F H 全体に対する比率は (第1節と第4節より) $\left[\frac{H O}{A C F H} \times \frac{A C f}{H O} = \right] (n+1) \times E \times \left(\frac{x^{p+1}}{p+1} - q \times \frac{x^{p+2}}{p+2} + q \times \frac{q-1}{2} \times \frac{x^{p+3}}{p+3} \dots \right)$ であり、x が A f の A H に対する比率を表すとすれば、X は A t の A H に対する比率を表すものとしよう。A F t の A C F H に対する比率は $(n+1) \times E \times \left(\frac{X^{p+1}}{p+1} - q \times \frac{X^{p+2}}{p+2} + q \times \frac{q-1}{2} \times \frac{X^{p+3}}{p+3} - \dots \right)$ であり、結果的に、t F C f の A C F H に対する比率は $(n+1) \times E \times^d$ すなわち二つの級数の差となる²⁰⁾。このことを命題10と比較すると、次の実践的規則が得られる。

規則1

p + q 回すなわち n 回の試行において、ある出来事が p 回起こり q 回失敗したということ以外、その出来事について何も知られておらず、またそのことをふまえて私が、一回の試行におけるその出来事の発生確率は X と x という二つの確率度合の間のどこかにあると推測する場合、私の推測が正しい公算は $(n+1) \times E \times^d$ すなわち級数 $\frac{X^{p+1}}{p+1} - q \times \frac{X^{p+2}}{p+2} + q \times \frac{q-1}{2} \times \frac{X^{p+3}}{p+3} - \dots$ と級数 $\frac{x^{p+1}}{p+1} - q \times \frac{x^{p+2}}{p+2} + q \times \frac{q-1}{2} \times \frac{x^{p+3}}{p+3} - \dots$ の差となる。E は $(a+b)^n$ を展開した際の $a^p b^q$ の係数である。

これは、q が小さな数であるときには用いるべき規則である。しかし q が大きくて p が小さい場合には、この級数上の随所で p を q とし、q を p とし、x を r すなわち $1-x$ とし、X を $R = 1-X$ とせよ。その変更は二つの級数間の差に何の変化ももたらさないだろう。

ベイズ氏の論考はここまでである。

[後編につづく]

訳注

- 1) 本文ではド・モアブル (Abraham de Moivre, 1667–1754) の著書として『偶然の法則』 *Laws of chance* が挙げられているが、プライスの注が正しく補足しているように、これはド・モアブル著『偶然論』 *The Doctrine of Chances* (初版 1718 年) とシンプスン (Thomas Simpson, 1710–61) 著『偶然の性質と法則』 *The Nature and Laws of Chance* (1740 年) の両タイトルが混濁したものだろう。『偶然論』第二版は 1738 年に、第三版は 1756 年に刊行される。プライスが注記している頁番号は第三版に対応したものである(訳注 2 も見よ)。シンプスン著の扉には「ド・モアブル氏著の最新版の最後に付加された二つの問題に関する完全かつ明晰な考究。うち一つはかの大人物[ド・モアブル]によって当該主題上最も有用と認められながらも二つの証明は割愛された」と記され、同様の主張が序文末尾でも繰り返された (Simpson 1740, iv)。「ド・モアブル氏著の最新版」とは『偶然論』第二版を指し、「二つの問題」に当たるのはこの第二版における第八十七問および第八十八問 (第三版における第七十三問および第七十四問) である。プライスはシンプスンの主張を受けてド・モアブルが「証明を割愛した」と記したものと考えられるが、トドハンター『確率論史』によれば、シンプスンの言い分は「まったく間違っ」ており、実際にはド・モアブルは証明を与えているどころか、シンプスンの証明がド・モアブルのそれと「同じ」ですらあるという (トドハンター 2017, 193)。

より正確に述べると、ド・モアブルが、これら二つの問題に解法のみを与えて証明を出し渋ったことは事実である (De Moivre 1738, 233–34, 243–44; トドハンター 2017, 160, 162)。ただしプライスが言及している箇所は『偶然論』第三版の第七十三問 (第二版の第八十七問) に付記された、同書 243 頁 (第二版 235 頁) から始まる一節「級数展開した二項式 $(a + b)^n$ の諸項の和を見積もる方法」であり、この「方法」に限ってならばド・モアブルは確かな証明を与えている。そしてシンプスン著『偶然の性質と法則』の「結び」(第三十問) で与えられた証明は (Simpson 1740, 84–85)、ド・モアブルが上記の一節中で与えた証明と実質的には同一なのである (トドハンター 2017, 193)。したがってド・モアブルが省いた証明をシンプスンが補ったというプライスの記述は、厳密に見れば不正確ということになる。

著者ド・モアブル自身の説明によると、この一節は「1733 年 11 月 12 日」に友人間の回覧用として単独で少部数印刷したものを、改めて『偶然論』第二版に採録したもので (De Moivre 1738, 235)、増補 (訳注 2 冒頭参照) のうえで第三版にも引き続き収録された。そこで彼が目指したのは、 $(a + b)^n$ の諸項の和が含まれる範囲を近似的に定めるといって、「二人の偉大な数学者ヤコブ・ベルヌーイとニコラス・ベルヌーイを除けば、これに取り組んだ人を知らない」難問に「新たな発想」で切り込み、「大雑把な範囲」を求めるに止まった両人の解法 (訳注 2 で見るヤコブ・ベルヌーイの定理を指す。1713 年に後者の手で没

後出版された前者の著書の中で公表された)の不足を補うことだった。そして、級数展開した二項式(ただし $a = b = 1$ とする)の「中間項がすべての項の和に対して持つ比」は $\frac{2}{\sqrt{nc}}$ (c は「半径 1 の円周」すなわち 2π)のかたちで表されるとする、「敬愛すべき学殖豊かな友ジェームズ・スターリング氏」の「無上の優雅さ」を持つ解法に接したのだった(De Moivre 1756, 243–44)。ただし $a \neq b$ であれば中間項は必ずしも最大項とはならないことに注意が必要である(*Ibid.*, 249)。確率論史を整理したラプラスによれば、ド・モアブルはスターリング(James Stirling, 1692–1770)の「美しい定理」を用いることで「二項式の非常に大きな累乗を展開したときの最大の項がすべての項の和に対して持つ比率と、この項とこの項にきわめて近い項との差の双曲対数とを定め」た(ラプラス 1997, 157)。ここでの「双曲対数(Hyperbolic Logarithm)」をド・モアブル自身の具体的表現に直すと、「中間項から間隔 1 [エル]だけ離れている一項が中間項に対して持つ比の[自然]対数」である。級数展開した二項式における $\frac{1}{2}n$ (ただし n は大数)番目の項を中間項とすると、間隔 $1 < \frac{1}{2}n$ の条件が当然満たされなければならない(De Moivre 1756, 245)。

数学的な委細は別稿の課題とし、「基本原則(fundamental Maxim)」だけを示すならば次の通りである。 n がきわめて大きな数の場合、すなわち「高次(high Powers)において、中間項から $\frac{1}{2}\sqrt{n}$ に等しい間隔だけ両側に離れた二つの外項(Extreams)の間に含まれる諸項の和が全項総和に対して持つ比は小数 0.682688, 約 $\frac{28}{41}$ であることが正当に示されるだろう」(*Ibid.*, 246–47; トドハンター 2017, 167)。級数展開した $(1+1)^n$ の全項総和は 2^n だから、「二つの外項の間に含まれる諸項の和」を f で示せば、「 $f/2^n$ 」によって両者の比率を表すことは可能である(De Moivre 1756, 246)。したがって、1 回の試行で起こる確率 a と起こらない確率 b とが等しい出来事が n 回の試行において起こる回数が、一定の誤差の範囲内に収まる確率を求めることができる。例えばコイン投げをきわめて多数回試行した際、表の出る回数が $\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}\sqrt{n}$ 回と $\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}\sqrt{n}$ 回という二つの回数ないし「度合」の間に収まる確率は上記の通り $\frac{28}{41}$ 程度の 28 程度である。この理屈に基づけば、たとえその成功と失敗の確率が全く同等であろうとも、ある事象が現実において生じる頻度には一定の幅を許容しうることが数理的に厳密な根拠を伴って想定されることになる。この点に深く関わりを持つ、男女の出生比率をめぐる同時代の論争の文脈については、訳注 2 を参照されたい。

最後に、数学者たちの横顔を明らかにしておこう。まず、その名に因んだ定理で著名なド・モアブルはフランス生まれのプロテスタント教徒(ユグノー)である。初めギリシア語を学んだが途中でデカルトに魅了されて数学に転向し、1685 年のナント勅令廃止を受けて、87 年、弟とともにイングランドへ移住した。このとき姓に *de* を付したとされる(ODNB)。ちなみに、イングランド生まれではあるが同様のかたちで姓を改めた人物にダニエル・フォー、すなわち『ロビンソン・クルーソー』(1719 年)の著者となるデフォー(*de* Foë)が

いる。フォーの改姓は 1695 年頃である (Backscheider 1989, 102)。話を戻すと、ド・モアブルはエドマンド・ハリーやアイザック・ニュートンの直接の知己であり (その縁で 1697 年に王立協会会員に選出される)、自らの私塾ではニュートン『プリンキピア』をテキストに用いたと伝えられる。ただ、それと同時に、大陸での数学教授職を求めてライブニッツ支持者のヨハン・ベルヌーイとも文通していたため、微積分法発見の栄誉の先取権をめぐる、あまりに有名な「ニュートン対ライブニッツ論争」の渦中に引きずり込まれた。

続いてシンプソンである。家業の機織職との兼業で教師を務め、半教半学で数学を修練した彼は、のちに自ら編集人も務める数学雑誌『婦人日誌』*Ladies' Diary* (カントンも月蝕の予測記事を寄稿していた)等への寄稿を繰り返しながら、微積分法の解説書を世に問うなどして健筆を揮った。1743 年に王立軍事学院の数学助教職を得、45 年には王立協会会員に、58 年にはストックホルム科学アカデミー会員に選出される。ただ、トドハンターが示唆したように、シンプソンの書き物はド・モアブルによる先行著作の焼き直しに過ぎない場合も見られ、長命だった後者との間には、偶然論すなわち確率論のみならず、それを応用した年金論をめぐる火花が散った (ODNB)。

もちろん、スターリングにも触れておかねばならない。彼はスコットランド出身で、スネル (Snell) 奨学生として 1711 年にオックスフォード大学ベイリオル・カレッジに進んだ。だがジャコバイト主義 (宣誓拒否) を貫いたため、ジャコバイトの乱 (第一次, 1715 年) を受けて奨学生資格を剥奪され、六年間留まった学窓を離れた (ODNB)。のちにアダム・スミスが同じ奨学金を受けて同じカレッジに進んだとき、奇遇なことに再びジャコバイトの乱 (第二次, 1745 ~ 46 年) が起こる。その余波を受けてか否か、スミスのオックスフォード留学もまた六年で終止符を打たれた。スターリングはその後大陸でベルヌーイ家と交流し、帰国後はロンドンで数学教師を務め、故国のみならず若き日の生業までも同じくしたアーバスノット (John Arbuthnot, 1667-1735 / 訳注 2 参照) の紹介で 1726 年に王立協会会員となる (53 年に退会)。1730 年代にはスコットランド鉱山会社の経営陣に名を連ねたため数学研究の機会を少なからず失うが、オイラーと文通し、その機縁で 46 年にベルリン王立アカデミーの会員資格を得る。『アダム・スミス伝』の著者ロスによれば、その後「スターリングがグラスゴーでフランス語と簿記や航海術といった実用的学科を教えた 1750 年代にはスミスは当地の大学の教授だったので、スミスはスターリングを知っていたかもしれないし、あるいは彼について聞いたことがあったかもしれない」(Ross 2010, 59 / 訳 69)。オックスフォードへの留学前、グラスゴー大学の学生時代に「数学と自然哲学」を特に好み、ユークリッド幾何学の問題に「夢中」になっていたスミス (Phillipson 2011, 42 / 訳 68-69) と数学者たちとの知的交流の内実もまた、別稿の主題となり得よう。

2) プライスが参照指示している『偶然論』第三版の 252 頁には、訳注 1 で言及した一節「級

数展開した二項式 $(a + b)^n$ の諸項の和を見積もる方法」の末尾に付されるかたちで同書 251 頁から 254 頁にかけて収められた、「所見 (REMARK) II」(同書第二版には見られない)の中途部分が載っている。そこでは、フランスの数学者でマルブランシュの弟子だったモンモール (Pierre Remond de Montmort, 1678–1719)の著書『偶然ゲーム解析』*Essay d'Analyse sur les Jeux de Hazard* 第二版 (1713 年)に収録された、ヨハン・ベルヌーイの(息子ではなく)甥に当たるニコラス・ベルヌーイ (Niklaus Bernoulli, 1687–1759)のモンモール宛書簡への、批判的な言及がなされている。「宇宙の不動の秩序を保ち、各種の存在を繁栄させ、繊細な種族 (Kind)に対してそれぞれの地位に適した程度の幸福をもたらす」「一定の法則 (certain Laws)」が確率論を支えているとした「われわれの最良の著述家たちによる」論証を、ニコラス・ベルヌーイが「放棄し、あまつさえ中傷した」というのである (Moivre 1756, 252)。

上記書簡で N・ベルヌーイが取り上げたのは、アーバスノットが『王立協会紀要』第 27 巻 (1712 年刊, 1710 ~ 12 年に発行された第 325 号から第 336 号を採録)に載せた短い論文「両性の誕生に見られる恒常的規則性に鑑みた神の摂理の論証」である (トドハンター 2017, 124–25)。トドハンターは、このアーバスノットの小論について「確率論に関する事柄はほんのわずかしかな」と評し (Ibid., 184), ジョン・メイナード・ケインズの名著『確率論』(1921 年)における充実した「参考文献」リスト中での言及も、「男児出生数の超過が非常に一定している (invariable)から、男児と女児のどちらが生まれるかは等しい確率ではない、と結論してもよいということを論証している」と (Keynes 1973, 474 / 訳 494), 実にそっけない解説に留まっているが、ここでアーバスノットが述べていることを精査してみると、トドハンターとそれに倣ったらしいケインズの寸評が不十分というだけでなく、この小論はド・モアブルが「偶然というテーマについて提起された中で最も困難なもの」と呼んだ問題に取り組むうえでの重要な示唆に富んでいることが分かる。その問題とは、ヤコブ・ベルヌーイ (ヨハンの兄)が遺著『推論法』*Art Conjectandi* (1713 年)第四部において提起し解法を示したところの、「実験の繰返しによって、ある出来事の確率が、ある与えられた確率まで無限に近づくような範囲 (Limits)を設けるという問題」を指す (Moivre 1756, 254)。

上記論文で、アーバスノットは二項定理を使って次のような計算をしている。まず、表裏二面を持つ (六面中三面が表で残り三面が裏である均整な)サイコロを用意し、仮に表を M、裏を F と名づける。サイコロ n 個を振って出た結果は、二項式 $M + F$ の n 乗ですべて示すことができる。二項定理より $(M + F)^n = M^n \times F^0 + \frac{n}{1} \times M^{n-1} \times F^1 + \frac{n \times (n-1)}{1 \times 2} \times M^{n-2} \times F^2 + \frac{n \times (n-1) \times (n-2)}{1 \times 2 \times 3} \times M^{n-3} \times F^3 + \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3)}{1 \times 2 \times 3 \times 4} \times M^{n-4} \times F^4 + \dots$ だから、例えばサイコロ四個を振った場

合には $(M+F)^4 = M^4 + 4M^3F + 6M^2F^2 + 4MF^3 + F^4$ となり、 M^4 は四個のサイコロがすべて表という結果を、 M^3F は三個が表で一個が裏という結果を示す。各項の係数は、サイコロごとに表裏を区別し、かつ、表と裏を出すサイコロの個数をそれぞれ一定としたときの、表裏の組み合わせ結果数を示唆しており、例えば三個が表、一個が裏の場合には、 $4M^3F = MMMF + MMFM + MFM + FMMM$ の4通りの結果がありうる。よって各項の係数の和 $1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16$ 通りが、結果として起こりうる全事象となる。出現頻度が最も高い結果は係数が最大のものだから、 $6M^2F^2$ より表と裏がそれぞれ二個ずつの場合である。逆に頻度が最も低い結果は係数が1、すなわち四個のサイコロすべてが表か裏を出す場合である (Arbutnot 1710-12, 186-87)。

いま n を「偶数 (even Number)」としよう。このとき $(M+F)^n$ を展開した級数の項の総数は奇数だから、最大の係数 (上述した通り $n=4$ のときは6) を持つ中間項が一つだけ現れる。それは先の級数の $(n/2)+1$ 項目に出現するため、それに対応させて、中間項の係数は $1 \times \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \dots$ に n の値を代入することで求められる。例えば $n=6$ であれば中間項は $(6/2)+1=4$ 項目に現れ、その係数は $1 \times \frac{6 \times (6-1) \times (6-2)}{1 \times 2 \times 3} = 20$ である。また、先の級数の M と F にそれぞれ1を代入すると、展開した各項の係数の和は $(1+1)^n = 2^n$ に等しくなる。よって、 $(M+F)^n$ を展開した級数の中間項の係数が、同じ級数の各項の総和に対して持つ比率は、 $1 \times \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \dots / 2^n$ で表すことができる。 $n=10$ であれば $252 / 1024 \approx 0.246$, $n=12$ であれば $924 / 4096 \approx 0.2256$ だから、この比率は n の値が増大するにつれて減少するだろう (Ibid., 187)。

アーバースノットはここで種明かしをする。なぜサイコロの二面をそれぞれ M および F と名づけたか、それは、 M を「Male」すなわち男性に、 F を「Female」すなわち女性に擬えるためであった。よって n を産児数とすれば、 $(M+F)^n$ を展開した級数は男児と女児の出生パターンを示すものになる。ここで、この級数の中間項における M の冪指数と F の冪指数は等しいことを思い起こせば、中間項が示唆するのは男児と女児の出生数がちょうど等しいケースだと分かる。上述したことをふまえば、 n すなわち産児数が大きくなればなるほど、男児と女児が均等な数で生まれてくる可能性は「すべての可能性 (all the possible Chances) のごく小さな部分に過ぎなくなる」はずである。それでもこの中間項の係数が最大のものだから、数学的には男女の産児数が均等になる頻度が最も高いことになるはずだが、厳密には中間項自体ではなく「中間項の隣のいくつかの項」つまり中間項の手前の側に「数理的ではなく物理的な (not Mathematical but Physical)」最頻の組み合わせが出現する傾向が見られる。 M の冪指数が F の冪指数を上回りがちだということである (Ibid., 187-88)。ここでは $M=F$ が前提とされており、 $M>F$ であれば係数が最大ではない項の値が中間項の値を上回りうるという想定は初めから考慮の外に置かれていることに

注意されたい。

だが、もし「単なる偶然 (mere Chance) の支配」が続くのなら、必ずや数理的な力のほうが勝り、中間項すなわち男女均等の「極値 (Extremities) に到達しないはずがない」にもかかわらず、現実においては「恒常的な比率 (a constant Proportion)」で男児数が女児数を上回り続け、換言すれば男女比が「一定の範囲 (limits)」に収まり続けている。アーバスノットはロンドンにおける 1629 年から 1710 年までの男女出生数のデータを証拠として文末に添付しつつ、このことが「82 年間のみならず、あらゆる時代において、またロンドンだけでなく世界中で」起きているとしたら、その確率は「無限に小さな量に近づく」だろうから、到底、偶然の差配によるものとは考えられないと述べる。そしてこのことこそが、数理的な最頻値を出現させまいとして「この出来事を賢明にも食い止める」ように作用している「自然の賢明なる体系 (Oeconomy)」が存在する証拠に他ならないのではないか。男性は「危険を冒して食糧を探さねばならず」事故に遭いやすいため、「この喪失 (Loss) を埋め合わせるべく、慎重なる自然がその賢明なる創造者の処置に従い、女性よりも多くの男性を産み出す」のではないか。そう説いて、アーバスノットは神の存在証明を済ませてしまおうとした (*Ibid.*, 188–90)。

以上で確認したように、アーバスノットの主張は、男児出生数の超過が恒常的である確率は「数理的」ないし純論理的に見て非常に小さいから、これとは別の「物理的」ないし自然神学的な働きを持ち込まないと現実の説明に困る、というもので、ケインズが言うような単純命題とは一線を画している。これに対して同時代人 N・ベルヌーイの場合はアーバスノットの論証をおそらく正面から受け止めており、だからこそ、ド・モアブルが「中傷」と受け取るほどの「反駁」を浴びせることになったのだろう (トドハンター 2017, 124)。反論は、先にド・モアブルからの孫引きのかたちで触れたヤコブ・ベルヌーイの定理 (訳注 1 参照) と呼ばれる方法を用いて行われた。アーバスノットの語彙を引き続き用いて述べると、 n 個のサイコロを振ったときに M が出る個数と n 個との比率が、展開された二項式における最大 (中間) 項の前後の諸項から導き出される二つの数字に挟まれた「一定の範囲」に収まる確率は、アーバスノットが述べるような「無限に小さな量」にはならないことを示したのである (*Ibid.*, 77, 125)。男児の出生数が女児のそれを上回るのも「数理的」に説明がつく、と告げたことになる。この N・ベルヌーイの主張がアーバスノットのそれに対する痛烈な論駁であることは間違いないが、それがただちに確率論ひいては「究極的原因 (final Causes)」 「偉大なる造物主、すべての統御者、全知全能かつ善なる彼」 (De Moivre 1756, 252) に対する冒瀆を意味するか否かは別問題である。ド・モアブルによる N・ベルヌーイ批判は、後者を「無神論的著述」の担い手の一人と呼びかねないところまで進み (*Ibid.*, 253)、辛辣をきわめているが、訳注 1 で見たスターリングの定理を借りてド・モアブルが行った証明は、N・ベルヌーイが J・ベルヌーイを参照しながら行った上記の証

明と、趣旨において大きく異なるところはないと考えられる（トドハンター 2017, 167）。

アーバスノットが『王立協会紀要』に載せた小論はかくして、ド・モアブルが明らかに念頭に置いていた J・ベルヌーイの定理の有効性を測るための重要な試金石としての役割を担ったと言えるだろう。ところで、アーバスノットがこの論文を発表した 1710 年代初頭における大ブリテンの政権担当者は大蔵卿ハーリ（Robert Harley, 1661–1724）であり、ハーリのもとで展開されたプロパガンダ作戦の一翼を彼はかのジョナサン・スウィフトとともに担い、二人はやがて親友となった（Nokes 1985, 147）。偶然か必然かは定かではないけれども、まだ若々しいアーバスノットがホイヘンス『偶然ゲーム理論』*De Ratiociniis in Ludo Aleae*（1657 年）の英訳を含む『偶然の法則』（1692 年）という題名の確率論を匿名で公にしたとき、その版元はモット（Benjamin Motte, d.1710）であった。スウィフト『ガリヴァー旅行記』初版（1726 年）を出版したモット（Benjamin Motte, 1693–1738）の父である（トドハンター 2017, 59–62 に解説あり。ただし、同書 27 頁の訳注はモット父子を区別しておらず、この点は誤り）。

『偶然の法則』の序文では、数理に落とし込めないような事象は現実においてさほど多くないため、「数字の力（Force of Numbers）」という「蠟燭」を使うことなく暗中模索を続けるのは「実に愚か」であると、そして偶然ゲームすなわち賭け事に限らず、その「力」を「蓋然量に対する分析の一種以外の何物でもない」「政治（Politicks）」に向けて用いることのできる者こそが「すぐれた政治家に他ならない」と、豪語されている（Arbuthnot 1692, xiii–xv）。確率論は「小部屋（Closet）での研究」ではなく「人類の観察」を通じてこそ「かなり有用で快適な思索」に向けて改良されていくであろうとの、自信に溢れた調子が見られる。ただ「あなたが仮に街路で一人の牧師（Parson）に会うとして、彼が宣誓拒否者（Non-Juror）だと判明した場合、[[対等な賭け（even Wager）]にするには] 1 対 18 で十分だ、なぜなら、そういう者は 36 人に 1 人しかいないからである」（18 人中 1 人が拒否者か否かを賭ければ、2 回に 1 回は勝つことができるので、勝率は 2 分の 1 という意味だろう）との一見軽妙な発言からは（*Ibid.*, xvii），馬が合ったスウィフトに通じるダークユーモアの根の深さを思わずにいられない。牧師だったアーバスノット父（Alexander Arbuthnot）こそがまさにスコットランドの宣誓拒否者として名誉革命体制に抗い、自らの教区を追われてまもない 1691 年（『偶然の法則』出版の直前）に死没して、墓碑建立すら許されないほどの酷い仕打ちを受けていたからである（ODNB）。

イングランド人の代名詞「ジョン・ブル（John Bull）」の生みの親はスコットランドの出身だった。そして父子ともどもアバディーン大学マーシャル・カレッジに学んだ形跡がある。彼らを「アバディーン啓蒙」の先駆者と呼べるかどうかの判定は本稿の考察範囲を越えるが、興味深い探究主題となりうるであろう。訳注 15 も参照されたい。

- 3) プライスは 1758 年、ロンドン北部ニューイントングリーン (Newington Green) の長老教会牧師に就任し、この職に 83 年まで留まった。同地区には 17 世紀より非国教会派の拠点が存在した。特に、オックスフォード在学中に独立 (会衆) 派の影響を被り、大陸でジャンセニズムの洗礼を受けて帰国したのち、プラトン主義を理想化しつつ異端を含めた古代宗教史を研究したゲール (Theophilus Gale, 1628–79) や、ケンブリッジ大学に続いて (1640 年代後半に王党派が一掃されたのちの) オックスフォード大学で学び、長老派牧師として活動しつつ、『王立協会紀要』第 10 巻第 113 号 (1675 年 4 月 26 日発行) に海砂による土壌改良を唱えた自然科学論文を発表するなどしたモートン (Charles Morton, 1627–98) の例は、よく知られている。両者はそろってニューイントングリーンの地に非国教徒学院を開設し、少数ながらも集った学生たちに自らの先進的知識を伝えた。なおモートンの上記論文は、彼の友人でロバート・ボイルの助手を務めていた自然哲学者コックス (Daniel Coxe, 1640–1730) を通じて世に出たが (Vickers 1996, 35), 友による紹介が『王立協会紀要』への道をつけた点では、プライスによる紹介を受けたベイズの場合と構図としては同じである。ベイズもモートンも長老派牧師であった。ただしベイズは生前すでに王立協会会員であったが、モートンはそうではなかった。

さて、ゲールの学院では、彼の甥かつ教え子で後継者のロウ (Thomas Rowe, 1656/7–1705) によってデカルトの哲学が教えられた。モートンもまた大陸哲学の影響を受けていたことが指摘されている。モートンはやがて新大陸に移住してハーヴァード大学で教えるが、同大学の教科書として 1720 年代まで用いられ続けた著書『自然哲学概論』(渡海翌年の 1687 年刊行、ただし原稿は非国教徒学院時代の講義を通じてまとめられたものと考えられ、1680 年に編集されたコピーがオックスフォード大学ボドリーアン図書館に収蔵されている。Hornberger 1940, xxxiii 参照) にはニュートンの片鱗は見られず、その知見はあくまでボイルやデカルト止まりであった点を、科学史家バーナード・コーエンが明らかにしている。証左の一つは「見ること (Sight) は一瞬である、なぜなら空中にはつねに、至るところに物体が存在するため、光源 (the luminous body) によってその物体に一つの動作が与えられさえすれば、その動作はただちに、同一線上に位置するすべての粒子 (particles) に伝えられるからである」との同書の一節だった (Morton 1940, 156)。つまり光の伝達は棒の一端に力を加えれば他端にただちに力が伝わるのと同様だと、換言すれば光速度は無限だとモートンは述べているが、コーエンによれば、この考えかたはきわめてデカルト的なものであった。それは、『自然哲学概論』の現存する最初のコピー (上述) が編纂される四年前にレーマー (Ole Rømer, 1644–1710) がパリで発表し、翌 1677 年 6 月 25 日発行の『王立協会紀要』第 12 巻第 136 号に英訳が掲載されたことでイングランドの学界でも大いに話題になった、光速度の「有限」を示す観測結果を、全く無視したものなのである (Cohen 1942, 662)。ちなみにニュートン自身は、『光学』初版 (1704 年) の第一

篇冒頭でこう述べている。「木星の衛星の蝕の時差 (*Æquations of the times*) から得られた論証によれば、光の伝播には時間がかかり、太陽からわれわれまで到達するのに約7分かかかるようである」(Newton 1704, I, 2 / 訳 28)。太陽光が地球まで到達するのに要する時間はもう少し長く、実際には8分強である。

ゲールとモートンの思想について、そしてニューイントングリーンに伝説的な二つの学院を開いた両者の関係について、詳細は別稿に譲る。ここでは、二人には共通の友人として非国教会派牧師のリー (Samuel Lee, 1625?-91) がいたこと、またゲール没後、蔵書のヘブライ語経典類が一千点ほどハーヴァード大学図書館に寄贈された事実から、モートンに限らずゲールもまた新大陸における知の拠点形成に深く寄与していたと言えることの、二点にのみ (Morison 1940, xiii および Wallace 2011, 93 参照) 言及しておきたい。

- 4) 「逆比の複合 (*componendo inverse*)」とは、比を扱ったユークリッド『原論』第五巻の定義によるものと見られる。グラスゴー大学数学教授としてアダム・スミスの師の一人であり、かつ同僚となったシムスン (Robert Simson, 1687-1768) の英訳 (1762 年) によれば、定義 14 では “*Invertendo, by Inversion; when there are four proportionals, and it is inferred, that the second is to the first, as the fourth to the third*” (「逆比とは、四つの比例項がある場合に、第二項の第一項に対する比が第四項の第三項に対する比に相当すると考えられるものである」)、そして定義 15 では “*Componendo, by Composition; when there are four proportionals, and it is inferred, that the first together with the second, is to the second, as the third together with the forth, is to the forth*” (「比の複合とは、四つの比例項がある場合に、第一項と第二項の和の第二項に対する比が第三項と第四項の和の第四項に対する比に相当すると考えられるものである」) と述べられている (Simson 1762, 113)。 $a : N - a = P : b - P$ の逆比は $N - a : a = b - P : P$ であり、その比の複合は $N : a = b : P$ (さらに逆比をとれば $a : N = P : b$) である。

ちなみに、現代における『原論』標準版は定義 13 に逆比を、定義 14 に比の複合を記すが (中村・寺阪・伊東・池田訳 93)、これはシムスンの英訳に見られる定義 8 すなわち「類似ないし釣り合いは比と同種のものである (*Analogy, or proportion, is the similitude of ratios*)」が削除されたことに伴い、番号が一つ繰り上げられたためである。シムスンは注記で、類似を比例に擬えるのは「数学の目指すところに何ら貢献をなしえず、一般的だが粗雑で混乱した類似の概念を初学者に与えるだけである」としたバロー (Isaac Barrow, 1630-77) の見解を引きつつ、定義 8 は「ユークリッドではなく、誰か未熟な編者 (*some unskillful Editor*) の手で付け加えられたもの」の一つだと考えられると記す (Simson 1762, 304-5)。バローはニュートンの師にして、ケンブリッジ大学ルーカス教授職の前任者である。シムスンが序文でも言及している通り、この「未熟な編者」とは古代ギリシア世界

において『原論』の改訂普及版を作成したテオン (Theon) を指すのだろう。「かなり恣意的な改竄によって『原論』の原型はいちじるしく歪められ、くずされることとなった」テオン版は 19 世紀初頭まで影響力を保ち続けた (同訳 469-70)。行き過ぎた改訂に気づきながらも、18 世紀の人シムスンはこれに依らざるをえなかったわけである。

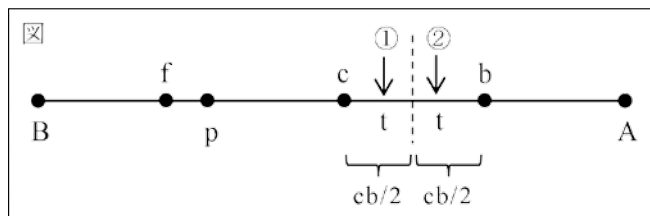
5) $P + y = x$ より $y = x - P$, これを $\frac{y}{x} = \frac{N-b}{N}$ に代入すると $\frac{x-P}{x} = \frac{N-b}{N}$, 変形して $1 - \frac{P}{x} = 1 - \frac{b}{N}$ より $\frac{P}{x} = \frac{b}{N}$ ($\frac{x}{P} = \frac{N}{b}$), したがって $\frac{x}{N} = \frac{P}{b}$ である。

6) $(a + b)^{p+q}$ の原文における表記は $\overline{a + b}^{p+q}$ である。同時代の他の著作でも用いられている記号 $\overline{\quad}$ について、本稿では現代の表記法に従って () に置換する。命題の数学的含意については訳注 7 を見られたい。

7) 二項定理より, $(a + b)^{p+q} = \sum_{q=0}^{p+q} \binom{p+q}{q} \times a^p \times b^q$ の二項係数 $E = {}_{p+q}C_q = (p + q)! / p! q!$ である。E の意味については訳注 2 のアーバスノット論文も参照のこと。

8) 「印刷業者の明らかなミスと思われるものは修正した」(Barnard 1958, 295) という Barnard 版をはじめ、Barnard 版を再録した Swinburne 2002 や、原典の図表を含めて新たに版を組み直したと見られる Dale 版 (その証拠に Dale 2003 における 278 頁の図は p の位置が誤っている)、あるいはプライスのカントン宛書簡の同封物としての論考全文を採録した Price 1983 でもまた改訂はなされていないが、ここは「p と t を、f と b に最も近い f b 上の分割点」に叙述を改めるべき (c を b に訂正するべき) だろう。原典の修正を提案することになるため、手製の図を示しながら丁寧に証明したい。

まず f と b は AB 上の点で、p と t は f b 上にあり、c は $fc < pt$ を満たすような位置の点である。p と t は、線分 AB を $cb/2$ よ



り小さい長さに均等分割した場合に、それぞれ f と (原典によれば) c に最も近い分割点である。とすると、p と t はそれぞれ図の f および c の右方にあることは間違いない。もし t が図の c の左方にあれば、p も t も f c 上にあるため必ず $fc > pt$ となり、条件に反する。

ここで、p と t を、均等分割された部分の端点とすることの含意を掘り下げてみよう。p を右端とする分割部分の左端は、f か、f より左に位置する点である。仮に f より右にあ

れば、その点が p になるため矛盾する。 t についても同様である。仮に f および c が分割部分の左端であれば、 $fp = ct$ なのは自明である。この場合、

$$fc = fp + pc \quad \text{かつ} \quad pt = pc + ct \quad \text{より} \quad fc = pt$$

となり、 $fc < pt$ の条件を満たさない。よって f と c は、どちらか一方が端点か、またはどちらも端点ではない。

f が端点の場合、分割部分の長さは fp である。 $fc < pt$ を満たすには、上式より $fp < ct$ でなければならないが、 t は分割部分の右端であるから、 ct が分割部分の長さ（＝ fp ）よりも長ければ、 c と t の間にこの分割部分の左端が位置しなければならず、 t が c に最も近い分割点であるとの前提に反する。

c が端点の場合、分割部分の長さは ct である。 p を右端とする均等部分の左端を、 $fp < ct$ を満たすように f より左の点に取ることは可能である。

f と c のどちらも端点ではない場合にも、 $fp < ct$ を満たすような分割部分の左端となる点を、 f の左方と c の左方にそれぞれ取ることは可能であろう。

上記をふまえると、 t が ① の位置、すなわち $ct < (cb/2)$ を満たすような範囲にあるときに $fc < pt$ が満たされるのは、 f と c のうち c のみが端点か、 f と c の両方が端点ではない場合に限られる。

では、原典を改訂して、 t を「 b 」に最も近い分割点とすればどうか。分割部分の長さは $cb/2$ より短いため、図の②の位置になる。この場合、 $ct > (cb/2)$ は自明であり、また f が分割部分の左の端点だろうとなかろうと $fp < (cb/2)$ は成り立つため、 $fp < ct$ は明らかである。よって $fc (= fp + pc) < pt (= pc + ct)$ が常時満たされることになる。ところで、「 Bp と pt と tA は通約可能」という条件が「つねに実現されうる」ように p と t が配置されると想定されているが、ここでの通約可能とはすなわち Bp と pt と tA のそれぞれの長さが均等分割部分の長さの任意の整数倍に等しいことを指すと考えられる（換言すれば Bp と pt と tA は整除可能であることを意味する。訳注 15 の掉尾を参照のこと）。均等分割部分の長さに対して $cb/2$ より小さいという以外の制約がかからなければ、分割部分の長さを微小単位にまで縮小しさえすればこの条件を容易に満たせることは、原典の言う通り「明白」である。したがって問題は均等分割部分の長さに対する追加的制約の有無であるが、 t が ① の位置にある場合には、上述したような追加的制約を受ける場合がありうるものの、 t が ② の位置にありさえすれば、 t を極限まで b に近づけても $fc < pt$ の条件に抵触しないわけであるから、均等分割部分の長さを任意の値まで縮小することに支障はない。

以上より、「 Bp と pt と tA は通約可能」という条件を「つねに」満たすためには、 t は均等分割部分の、 c ではなく b に最も近い fb 上の端点でなければならないことが分かる。証明は終わりである。

9) 「曲線方程式 (equation of the curve)」とは曲線 $A m i g B$ ($A i B$) を表す関数のことと考えられる。訳注 10 を見られたい。

10) $x = A e / A B$, $r = B e / A B$, ただし $A e + B e = A B$ より $r = 1 - x$ である。曲線 $A m i g B$ 上の点 h は $y = e h / A B$ となるように幾何学的に位置付けられる。訳注 7 をふまえれば $y = p + q C q \times x^p \times (1 - x)^q$ であるから, e の位置 ($A B$ の分割比) が与えられれば y は p と q の値に依存して決まる。

11) 命題 3 に初出の「複比」とは, 要するに比の積である。 $e f / A B$ に $e h / A B$ を乗じると $e f \cdot e h / A B^2$ であり, 長方形 $f h$ の面積は $e f \cdot e h$, 正方形 $C A$ の面積は $A B \cdot C D = A B \cdot A B = A B^2$, したがって $e f \cdot e h / A B^2 = f h / C A$ である。

12) デイルも指摘する通り (Dale 2003, 314), 「第 4 節」は後続する命題 10 の本文に登場する。「まもなく (presently)」と述べられているのは, そのためである。

13) 命題 9 注釈 (原注 v) および付論の仮定により, 命題 10 では図形が $1 / E$ だけ縮小されているため, 先の $y = E x^p r^q$ から E が取り去られている。

14) 二項定理より $(1 - x)^q = 1^q + q \times 1^{q-1} \times (-x)^1 + q \times \frac{q-1}{2} \times 1^{q-2} \times (-x)^2 + q \times \frac{q-1}{2} \times \frac{q-2}{3} \times 1^{q-3} \times (-x)^3 + \dots = 1 - q x + q \times \frac{q-1}{2} \times x^2 - q \times \frac{q-1}{2} \times \frac{q-2}{3} \times x^3 + \dots$ であるから, これに x^p を掛けると $x^p - q x^{p+1} + q \times \frac{q-1}{2} \times x^{p+2} - q \times \frac{q-1}{2} \times \frac{q-2}{3} \times x^{p+3} + \dots$ となる。

15) 正確には, 英語で刊行されたニュートン『光学』初版 (訳注 3 参照) 第三篇の後ろに添えられたラテン語の論文「曲線図形の求積法 (Tractatus de Quadratura Curvarum)」に見られる「命題 10 の問題 3 の事例 1」を指す (Newton 1704, II+III, 193-94 / 第二篇および第三篇の頁数は第一篇とは切り離された通し番号となっている)。このラテン語論文の英訳は, コリン・マクローリンがアバディーン大学マーシャル・カレッジ数学教授職を辞した約一年半後の 1727 年 8 月, この職を弱冠の年齢で引き継ぐことになったステュアート (John Stewart, c.1708-66) の手で行われており, ベイズ存命中の 1745 年, 『曲線図形の求積および無限個の項を持つ方程式による解析に関するアイザック・ニュートン卿の二論文について』と題された訳書兼手引書の前段部分として, ロンドンで出版された。このステュアー

ト著は数学の上級学生（第三学年）向けの教科書とすべくまとめられた模様で（Wood 1993, 87）、ニュートン原文の翻訳に続いて丁寧な解説が施されている。ステュアートは亡くなるまで教授の椅子に留まったが、この著作を除いて公刊したものはない。ただ彼は、アバディーン哲学協会のメンバーとして（水田 1996, vii）、また卓越した教師として「アバディーン啓蒙」の世界に確かな事績を残しており、学生時代のトマス・リードがニュートン『プリンキピア』を読む際に頼りとした親しい学友でもあった。リードがアバディーン大学キングス・カレッジで数学を教えた際には、親友ステュアートの教授法を模範にしたらろうと目されている（Wood 1993, 19, 89 や長尾 2004, 121 参照）。ステュアートは、数学を自然哲学の基礎として定め、従前支配的だったスコラ学に置き換えようとした。「純粹数学なしに自然哲学を理解しようとするのは、アルファベットなしに読書しようとするのと同じようなものだ」と豪語した彼の姿が記録されている（Wood 1993, 23）。

さて、ステュアート訳の「命題 10 の問題 3」は「横座標 z を所与としたときの縦座標 y が、非多項方程式（an Equation not affected）によって決定される曲線と幾何学的に比較される、最も単純な図形を見出すこと」であり、続く「事例 1」では、「縦座標を $a z^{\theta-1}$ とすれば、面積は $\frac{1}{\theta} a z^{\theta}$ である」と述べられる（Stewart 1745, 21）。これは現代で言うところの定積分を意味する操作であって、逆に、図形の面積として与えられている値を微分すれば縦座標の値になることが分かる。ステュアートは解説の中で、ニュートンのこの操作ないし解法は「最もエレガントであり、かつ、他のどの解法よりも有用であって、古代（the Ancients）の解析と近代（the Moderns）の解析のいずれにおいても汎用性を持つものだ」と述べているが（*Ibid.*, 59）、ここであえて「古代」が引き合いに出されている理由は、ユークリッド『原論』（訳注 4 参照）を意識したためであろう。ステュアートは『原論』を手始めに数学の学習に入るよう学生たちに薦めており、ニュートンの方法を賞賛しながら、その反面で「古代の幾何学は知的明晰さや厳密性の点でいまだ乗り越えられていない」と見なす、「ヤヌスの双顔」の持ち主だったと言われている（Wood 1993, 20）。この煮え切らない態度こそ過渡期の数学者らしいと評してもよいだろう。ニュートンの「極小量（Indivisibles）の方法は厳密な幾何学の原理とさほど整合的ではないと考えられ」、それは「もし極小量なしで目的を果たせるのなら、幾何学への導入にさほど向いていないよう」であり、さらに言えば「アイザック・[・ニュートン]卿も同じ考えだろうと思われる」とさえ記されている本書は、ニュートンを学ぶための解説書でありながら、訳者兼著者ステュアートによるかなり踏み込んだ叙述が展開されている事実注意到すべきである（Stewart 1745, 60-61）。

ただステュアートは、ジョージ・バークリが『解析者』（1734 年）で繰り広げたようなニュートン批判（ニュートンの友エドモンド・ハリーが標的だったとも言われる）に与することは決してなかった。『解析者』は以下の通り述べて微分法をこき下ろす。重要な箇所であるからそのまま訳出、引用しておこう（Berkeley 1734, 20-21）。なお、引用中に挙げられた数

式では n^2 が $n \cdot n$ と表記されているけれども、この点はニュートン自身が論文「曲線図形の求積法」の序文で用いた表記と同一である。ちなみにステュアートの英訳では n^2 に改められている (Newton 1704, 169; Stewart 1745, 4)。

「量 x が一様に流れているとして、 x^n の流率 (Fluxion) を見出すこととしよう。 x が流れて $x + o$ になると同時に、その冪 x^n は $(x + o)^n$ となる。それはすなわち無限級数 (infinite Series) 法に従って $x^n + n o x^{n-1} + \frac{nn-n}{2} o o x^{n-2} + \dots$ であるから、増分 o と $n o x^{n-1} + \frac{nn-n}{2} o o x^{n-2} + \dots$ は 1 対 $n x^{n-1} + \frac{nn-n}{2} o x^{n-2} + \dots$ である。いま増分が消滅するならば、最後まで残る比率は 1 対 $n x^{n-1}$ であろう。しかしこの論の運びは適正ではなく、あるいは決定的とはいかないように思われる。なぜなら、増分が消滅する、すなわち増分が無である、もしくは増分が存在しないとしよう、と告げられた際には、増分が何かしらである、すなわち増分が存在するという旧仮定は破壊されるのだが、にもかかわらず、その仮定の帰結、つまりそのおかげで得られていた表明は保たれることになるからである。先の補助定理 (Lemma) に従えば、これは誤った論法である。」

「先の補助定理」が指すものは、この直前の一節でパークリが述べていた、ある仮定に基づいて他の諸仮定が組み上げられている命題において、前提となる最初の仮定が崩されれば、他も「崩されるか拒絶されねばならない」という (Berkeley 1734, 20)、ごく当たり前の条件である。要するに、増分があると仮定した議論において増分がないことを理由として引き出した結論は無効だ、そうパークリは述べて、ニュートンによる微分法の証明を不完全と見なしたことになる。出鱈目な言葉遊びが繰り返されていただけでは決してない。「無限級数法」すなわち二項定理をふまえるなら、展開された第二項以降に掛け合わされる増分 o の値が零に限りなく近づけば、 x の流率と、 $(x + o)^n$ を展開した諸項の和から第一項の x^n を引き去った残余である x^n の流率との比は、両者を「共通の」 o で割ることによって $1 : n x^{n-1}$ に限りなく近づくことを彼は正しく理解していたからである (Ibid., 22)。現代的な言葉で表現すれば、変数 x の微分値は 1 に向かい、 x^n の微分値は $n x^{n-1}$ に向かうことは了解されていた。にもかかわらずパークリは、こうした「極小量」ないし極限に訴える手法自体に対し、いわば方法論の見地から根底的な疑義を呈した格好になる。上記の推論では、微分法の成立証明として脆弱だと見なしたわけである。ステュアート同様、パークリは幾何学を重んじ、『解析者』の冒頭で「古来、幾何学は秀逸な論理学と見なされてきた」と述べたのに続けて、「その対象が視野の内にあり続け、対象に途切れることなく注意が注がれる」かぎり、幾何学こそが「真実の探究において汎用性をもつ」とした (Ibid., 5)。ニュートンの方法を「新しい」幾何学と呼ぶこともできるが、それは極限あるいは無限小分割 (後述) の概念を用いて対象を感覚的知覚から遠ざけ、幾何学本来の強みをむしろ失わせたというのが、彼の批判である。もちろん、ウォルポール派ウィッグと親和的だった「先の造幣局長官」とその周

囲の知的権威に対する攻撃という政治的意図の存在も、見過ごしてはならない (Caffentzis 2000, 258–61, 271n)。

ニュートン当人はすでに他界している中、『解析者』の登場から間を置かず、かのマクロリンにも先立ち反論の筆を執ったのが、種痘の効能にいち早く着目した医師にして自然哲学者のジュリン (James Jurin, 1684–1750) であった。ジュリンは王立協会幹事として会長ニュートンの晩年を支えた人物であり、ロバート・ウォルポールの顧問医師を務めたことでも知られる。ニュートンの推論には「誤謬も反理 (Paralogism) もない」と断言するステュアートが援用したのが、ケンブリッジ大学出身者を想起させる「フィラレテス・カンタブリギエンシス (Philalethes Cantabrigiensis)」の筆名で出版された、このジュリンの著作『幾何学は不信心の友にあらず』(1734 年) だった (Stewart 1745, 60n)。ニュートン同様トリニティ・カレッジ卒の彼は、『解析者』が先の引用箇所中で「増分が消滅する、すなわち増分が無である、もしくは増分が存在しない」(ニュートンのラテン語原文は *evanescent jam augmenta illa* / Newton 1704, 169) という仮定をニュートンが追加したことこそ矛盾だと主張した点について論駁するため、「発生の瞬間 (*momenta nascentia*)」と「消滅の瞬間 (*momenta evanescentia*)」を分けるという考えかたを導入した。まさに今生まれ出ようとしている量と消え入ろうとしている量は「異なる状況のもとに置かれた同一の量」だと解釈し、同じ極少量であってもあくまで有に向かおうとするものと無に向かおうとするものの区別があるとする事で、初めに有を仮定しておきながら後になって無を仮定する論理的矛盾を犯したとする、パークリの粘着質な批判をかわそうとしたと言える (Jurin 1734, 56–57)。

ちなみにベイズもこの「解析者論争」に参入した。『解析者』による反論から数学者を守る旨の副題が付されたベイズ著『流率原理入門』(1736 年) の、第三節がその舞台である。ここでの口吻は、微小時間としての「瞬間」を最始と最後の二通りに分けて解釈したジュリンのものによく似ている。以下に引用しておきたい (Bayes 1736, 37–38)。

「1. 彼ニュートンは x が増大することで $x + o$ になると仮定し、ここから彼は x の増分と x^n の増分との関係性 (relation) を導出する。

2. 消え行く増分同士の最後の比を見出すために、彼は o がそれ自体消滅するまで、あるいは無に等しくなるまで減少すると仮定する。

これら以外に彼は何も仮定を設けていないし、これらの仮定は明らかに、ある人が最初に階段を上り、次にその階段を降りると仮定するのと同じくらい首尾一貫しており、矛盾してもいい。増分が何者かであると同時に何者でもないとは矛盾しているが、増分が初め存在し、続いて消滅すると仮定することは、完全に首尾一貫している。先行存在を仮定することにより引き出された帰結の数々は、それらが正当なら、その後におけるそれらの消滅を仮定することからいかなる影響も受けはしないだろう。後者の仮定の

真実性が前者の真実性と矛盾するわけでは、決してないからである。」

つまり（ジュリンと）ペイズは、連続的な時間軸を持ち込み、始めと終わりという二つの「状況」を当該軸上で弁別することにより、パークリの無時間的ないし不連続（離散）的な議論に応答した。ペイズは鮮やかな手並みでニュートンの仮定を先後二つに集約し、第一の仮定から導き出される 1 対 $n x^{n-1} + \frac{n^2-n}{2} o x^{n-2} + \dots$ の関係性すなわち「比率（proportion）」は、 o が消滅に向かうとする第二の仮定とは独立に打ち立てることができることを示した。したがって「 o の減少につれて 1 と $n x^{n-1}$ との比が増分同士の比に近づいていく」状況が無矛盾に想定でき、この状況から「極限比（ultimate ratio）」としての微分値を算出することに支障はないのである（*Ibid.*, 38）。ペイズ『入門』のより詳細な解説については、Dale 2003 の第五章を特に参照されたい。

さて最後になるが、ニュートンの微（積）分法とそれへの批判の文脈に一応の着地地を与えるため、パークリの同時代人デイヴィッド・ヒュームに触れておきたい。ヒュームは『人間本性論』第一巻第二部第一節および第二節の主題をまさしく「無限分割の可能性（infinite divisibility）」に定めた。そして、先に見た通り「対象」を感覚（視覚）的に把持し続ける学問的方法を重視したパークリ（やピエール・ベール）が、感覚を通じて知覚可能な最小単位すなわち「可感的最小体（minimum sensibles）」の概念に立脚して無限小分割を批判した事実におそらく倣い（Caffentzis 2000, 257）、人間本性上認知可能な「最小体（a minimum）」の存在を論証しようとした（Hume 1978, 27 / 訳 42, 337n）。

論証過程においてヒュームは、有限な延長（例えば線）の無限分割はありえない、言い換えれば「無限数の部分は無限大の延長の観念と個体として同一の観念である」と述べたうえで、ここでの「部分」が「整除的（aliquot）」だろうと「比例的（proportional）」だろうと結論は変わらないと断言した（*Ibid.*, 30 / 訳 45）。この発言は、無限数の整除部分（延長を何らかの整数で均等分割した商の部分）ではなく比例部分を対象とするのであれば、必ずしも延長の無限を帰結しないという反論に対する、ヒュームの再反論に当たる。ヒュームが具体的に誰による反論を念頭に置いていたかは判然とせず、また「比例」の解釈も多様に成り立ちうるとは考えられるものの、一つの解釈として、前述したペイズ流のパークリ批判を受けてのものであったと想定しても的を大きく逸してはいないだろう。繰り返しになるが、ペイズは、 o を極限まで小さくすることで、 $1 : n x^{n-1} + \frac{n^2-n}{2} o x^{n-2} + \dots$ の比を $1 : n x^{n-1}$ に限りなく近づけることが可能だと述べたわけであり、これは換言すれば、 o の無限分割によって比率が一定の値に収束するという意味において延長は有限である、と主張したことになるのではないだろうか。木曾好能が指摘するように、上記の最小体、ないしは「数学的な点（mathematical points）の可能性を否定するための議論はすべてスコラの屁理屈」とヒュームが揶揄したときの、まさに彼の言う「数学的な点」の範疇から、収

束に伴う極限値の観念がこぼれ落ちていたことは否定できない (*Ibid.*, 32 / 訳 48, 338n)。しかし極限値もまた最小体に他ならないのである。

ところで、1775年4月10日付のプライス宛書簡の中でリードが、「無限大の数のうちに、ある[整]数と別の[整]数との比(Ratio)によっては完全に表現されえないような比率は存在しない、と明晰に思い浮かべる(*distinctly conceive*)ような者は、数学者ではないのではないのでしょうか。数学者は、この[整除的]方式では厳密に表現されえない無数の比が存在することを証明できるのです」と記した際、彼の脳裏に浮かんでいたのは、極限の観念を落としたがゆえに延長の整除部分と比例部分とを同列に論じることになったヒューム『人間本性論』の上掲叙述だろう(Price 1983, 194, 197)。「明晰に思い浮かべる」という表現は、同書第一巻第二部第二節に見られる、「精神が明晰に思い浮かべる(*clearly conceive*)ものは何であれ、可能的存在の観念を含む」というヒュームの言葉への(Hume 1978, 32 / 訳 47)、明白な当てつけである。リードは、ヒュームとプライスが互いの自邸を行き来するほど「暖かな」仲だった事実(Hume 1954, xix; Price 1983, 45n; Earman 2002, 92)を知っていたからこそ、このような書簡を送ったのであろう。チャタム(大ピット)政権の北部担当国務次官(1767年2月～68年1月)としてロンドン滞在中だったヒュームに宛てて、「ニューイントングリーンで貴殿にお会いできれば格別の喜びですが、[ヒュームが多忙なため]望外のことです」と、プライスが書き送ったこともある(1767年3月24日付 / Price 1983, 47)。親友ベイズの他界から数年後、彼はヒュームという新たな友を得ていた。ニューイントングリーンについては訳注3をご覧いただきたい。また、ヒュームとプライス、そしてベイズの三つ巴の関係についての検討は別稿に譲りたい(差し当たり見るべき先行研究として Earman 2002 がある)。

- 16)「アイザック・ニュートン卿に頼らなくても」と述べられているにもかかわらず、ここに登場するドット(・)付き x はニュートンの用いた「流率」を表す。ジョン・ステュアート訳「曲線図形の求積法」(訳注15参照)では、「連続した動きによって増減する不定量、すなわち前方あるいは後方への流れ(*flowing*)」を例えば「 z, y, x, v 」と表記し、「それらの増加の流率(*Fluxions*)ないし速さ(*Celerities*)を、同一文字に点を添えた、 $\dot{z}, \dot{y}, \dot{x}, \dot{v}$ で示す」と述べられている(Stewart 1745, 5)。 $y \dot{x}$ が意味するのは、 y が x の関数としての「流れ」の微分値に等しいということ、要するに導関数だということである。

ニュートン「曲線図形の求積法」を解説する中で、ステュアートが分かりやすい例を示しているから引いておく。 $z = ax$ という関数の流率を求めるとしよう。 a は定数、 x と z は「流れ」すなわち流量である。 x と z それぞれの増分を X と Z で表す。すると $z + Z = a \times (x + X) = ax + aX$ である。いま左辺から z 、右辺から ax に等しい ax を引き去ると $Z = aX$ となり、両辺を X で割ると $Z/X = a$ となる。ここで X と Z を「まさに消

減せんとするまで無限に減少させ、極限比 (ultimate Ratio) のもとに置くとしたら、その場合に消滅増分 (evanescent Increments) の比は流率の比に等しい」(用語については訳注 15 も参照のこと)。よって $Z/X = \dot{z}/\dot{x}$ だから、 $(\dot{z}/\dot{x}) = a$ より、両辺に \dot{x} を掛けて $\dot{z} = a \dot{x}$ と分かる。ちなみに、これもステュアートの解説に倣い、流量としての変量の一つ増やした $z = x y$ という関数の流率も求めておこう。同様に x, y, z の増分をそれぞれ X, Y, Z と表すと、 $z + Z = (x + X)(y + Y) = x y + x Y + X y + X Y$ である。いま左辺から z 、右辺から z に等しい $x y$ を引き去ると、 $Z = x Y + X y + X Y$ となる。両辺を X で割ると $Z/X = (Y/X) x + y + Y$ 、同様に極限比を考えると $Z/X = \dot{z}/\dot{x}$ 、 $Y/X = \dot{y}/\dot{x}$ であるから $\dot{z}/\dot{x} = (\dot{y}/\dot{x}) x + y + Y$ 、ここで Y も限りなく 0 に近いたため $\dot{z}/\dot{x} = (\dot{y}/\dot{x}) x + y$ 、両辺に \dot{x} を掛けると $\dot{z} = x \dot{y} + \dot{x} y$ である ($Z = x Y + X y + X Y$ の両辺を Y で割り極限比を求めても、流率の表記は同じである)。さらにもう一つ、 $z = x x (= x^2)$ という関数について、増分を X, Z として同様に計算すると、 $z + Z = (x + X)(x + X) = x x + x X + X x + X X$ より $Z = x X + X x + X X$ 、 $Z/X = x + x + X$ 、極限比を求めると X は限りなく 0 に近づくため $\dot{z}/\dot{x} = 2x$ である (Ibid., 70)。ここで \dot{x} を「最小体」(訳注 15) としての 1 単位に定めたならば、 $\dot{z} = f'(x) = 2x$ であるから現代表記となる。

以上をふまえて、 z を図形 A C f の面積 $\frac{x^{p+1}}{p+1} - q \times \frac{x^{p+2}}{p+2} + q \times \frac{q-1}{2} \times \frac{x^{p+3}}{p+3}$ と捉え、 $y = x^p - q x^{p+1} + q \times \frac{q-1}{2} x^{p+2} \dots$ を a と見なすならば、 $\dot{z} = y \dot{x}$ における y が x の関数としての面積量 A C f の導関数であることは明らかであろう。

17) 縦座標 $y = r^q \times (1-r)^p$ を、横座標 r で積分すればよい。訳注 14 の場合と同様に二項

式を展開すると $(1-r)^p = 1 + p \times (-r) + p \times \frac{p-1}{2} \times (-r)^2 + p \times \frac{p-1}{2} \times \frac{p-2}{3} \times (-r)^3 + \dots$ だから、これに r^q を乗じると $y = r^q - p \times r^{q+1} + p \times \frac{p-1}{2} \times r^{q+2} - p \times \frac{p-1}{2} \times \frac{p-2}{3} \times r^{q+3} + \dots$ である。積分すると、右辺は $\frac{r^{q+1}}{q+1} - p \times \frac{r^{q+2}}{q+2} + p \times \frac{p-1}{2} \times \frac{r^{q+3}}{q+3} - p \times \frac{p-1}{2} \times \frac{p-2}{3} \times \frac{r^{q+4}}{q+4} + \dots$ となる。

18) 「最初の級数」とはすなわち $\frac{x^{p+1}r^q}{p+1} + \frac{q}{p+1} \times \frac{x^{p+2}r^{q-1}}{p+2} + \frac{q}{p+1} \times \frac{q-1}{p+2} \times \frac{x^{p+3}r^{q-2}}{p+3} + \frac{q}{p+1} \times \frac{q-1}{p+2} \times \frac{q-2}{p+3} \times \frac{x^{p+4}r^{q-3}}{p+4} + \dots + \frac{x^{n+1}}{n+1} \times \frac{q}{p+1} \times \frac{q-1}{p+2} \times \dots \times \frac{1}{n}$ を指す。その第一項 $\frac{x^{p+1}r^q}{p+1}$ の流率 (訳注 16 を見よ) は $x^p r^q \dot{x} + \frac{q x^{p+1} r^{p-1}}{p+1} \dot{r}$

というように二項の和で表記されているが、後項の分数部分については、分子に含まれる

r の指数 p を q に改めた $\frac{q x^{p+1} r^{q-1}}{p+1}$ が正しい。Barnard 版その他では訂正されているものの (Barnard 1958, 307; Price 1983, 22), Dale 版では原典のままとなっている (Dale 2003, 285)。さて、訳注 16 で見たように、関数 $z = x y$ の流率は $y \dot{x} + x \dot{y}$ という二項の和で表記できる。ここで前項は $x \times y$ を x で微分した値に x の流率を掛けたもの、後項は同じく y で微分した値に y の流率を掛けたものである。 $\frac{x^{p+1} r^q}{p+1}$ もまた $x \times r$ を基本形にしている。したがって $\frac{x^{p+1} r^q}{p+1}$ の流率は、これを x で微分した値 $x^p r^q \{ = \frac{1}{p+1} \times (p+1) \times x^{p+1-1} \times r^q \}$ に x の流率を掛けたものに対し、 r で微分した値 $q \times x^{p+1} \times r^{q-1} \times \frac{x^{p+1}}{p+1}$ に r の流率を掛けたものを足し合わせることで求められる。後続諸項についても同様に、 x と r のそれぞれで偏微分した値に x と r の流率を掛け合わせた項の和を求めていくことで、原注 vii 冒頭に記されている「最初の級数の流率」を導き出すことができる。

加えて、 \dot{r} と $-\dot{x}$ が互換可能な理由を、再び $z = x y$ をモデルに考えてみたい。 y を r に置換して $z = x r$ としたうえで、この関数の流率を求めると、先述した通り $\dot{z} = r \dot{x} + x \dot{r}$ である。 \dot{r} と $-\dot{x}$ がもし互換可能ならば $\dot{z} = r \dot{x} - x \dot{x}$ が同時に成り立たねばならない。成り立つことを証明してみよう。まず $r = 1 - x$ より、 $z = x(1 - x) = x - x^2$ である。流量 z の増分を Z 、流量 x の増分を X と置くと、 $z + Z = (x + X) - (x + X)^2 = x + X - x^2 - 2xX - X^2$ である。左辺より z を引き、 $z = x - x^2$ であるから右辺より $x - x^2$ を引くと、 $Z = X - 2xX - X^2$ となる。両辺を X で割ると $Z/X = 1 - 2x - X$ だが、ここで X と Z を限りなく 0 に近づけると $\dot{z}/\dot{x} = 1 - 2x$ となる。 r を使って右辺を書き換えると $1 - 2x = (1 - x) - x = r - x$ だから、その後両辺に \dot{x} を掛ければ $\dot{z} = (r - x) \dot{x}$ 、右辺を展開すれば $\dot{z} = r \dot{x} - x \dot{x}$ と求まる。よって \dot{r} を $-\dot{x}$ で置き換えることができると証明された。

- 19) 訳注 7 で示したように $E = (p+q)! / p! q!$ であり、分子は $(p+q) \times \cdots \times (p+q-q+2) \times (p+q-q+1) \times (p+q-q)!$ と表記でき、分母は $q! \times (p+q-q)!$ と表記できるから、分子と分母をそれぞれ $(p+q-q)!$ で割ると、 $E = \{(p+q) \times \cdots \times (p+2) \times (p+1)\} / \{q \times (q-1) \times \cdots \times 1\}$ となる。 $p+q$ を n に置き換えて並び替えた分子は $(p+1) \times (p+2) \times \cdots \times n$ である。

- 20) Barnard 版は「 \times^d 」を multiplied に置き換え、それが $(n+1)E$ の乗数倍 (A F t の面積を表す X の級数と A C f の面積を表す x の級数との差を乗じる) を示す旨を分かりやすく表記している (Barnard 1958, 308; Dale 2003, 335)。

参考文献

- Arbutnot, J. 1692. *Of the Laws of Chance, or, a Method of Calculation of the Hazards of Game, Plainly Demonstrated, and Applied to Games at Present Most in Use, Which May Be Easily Extended to the Most Intricate Cases of Chance Imaginable*. London.
- . 1710–12. An Argument for Divine Providence, Taken from the Constant Regularity Observ'd in the Births of Both Sexes. *Philosophical Transactions, Giving Some Account of the Present Undertakings, Studies, and Labours, of the Ingenious, in Many Considerable Parts of the World*, vol. 27, pp. 186–90. London.
- Backscheider, P. R. 1989. *Daniel Defoe: His Life*. The Johns Hopkins University Press.
- Barnard, G. A. 1958. Thomas Bayes's Essay towards Solving a Problem in The Doctrine of Chances. *Biometrika*, vol. 45, pts. 3–4, pp. 293–315.
- Bayes, T. 1736. *An Introduction to the Doctrine of Fluxions, and Defence of the Mathematicians against the Objections of the Author of the Analyst, so far as They Are Designed to Affect Their General Methods of Reasoning*. London.
- . [1763] 1764. An Essay towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances. By the Late Rev. Mr. Bayes, F.R.S. Communicated by Mr. Price, in a Letter to John Canton, A.M. F.R.S. *Philosophical Transactions, Giving Some Account of the Present Undertakings, Studies, and Labours, of the Ingenious, in Many Considerable Parts of the World*, vol. 53, pp. 370–418. London.
- Berkeley, G. 1734. *The Analyst; or, a Discourse Addressed to an Infidel Mathematician*. London.
- Caffentzis, C. G. 2000. *Exciting the Industry of Mankind: George Berkeley's Philosophy of Money*. Kluwer Academic Publishers.
- Cohen, I. B. 1942. The Compendium Physicae of Charles Morton (1627–1698). *Isis*, vol. 33, no. 6, pp. 657–71.
- Coxe, D. 1675. The Improvement of Cornwall by Sea Sand, Communicated by an Intelligent Gentleman Well Acquainted in Those Parts to Dr. Dan. Cox. *Philosophical Transactions: Giving Some Account of the Present Undertakings, Studies and Labours of the Ingenious in Many Considerable Parts of the World*, vol. 10, pp. 293–96. London.
- Dale, A. I. 2003. *Most Honourable Remembrance: The Life and Work of Thomas Bayes*. Springer.
- Earman, J. 2002. Bayes, Hume, Price, and Miracles. *Bayes's Theorem*, edited by R. Swinburne. The British Academy and Oxford University Press.
- Hornberger, T. 1940. The Compendium Physicae: An Introduction. In Morton, *Compendium Physicae*.
- Hume, D. [1739–40] 1978. *A Treatise of Human Nature*, edited by L. A. Selby–Bigge. 2nd ed. Clarendon Press. 木曾好能訳『人間本性論 第一巻 知性について』法政大学出版局, 2012.
- . 1954. *New Letters of David Hume*, edited by R. Klibansky and E. C. Mossner. Oxford University Press.
- Jurin, J. 1734. *Geometry No Friend to Infidelity: Or, a Defence of Sir Isaac Newton and the British Mathematicians, in a Letter to the Author of the Analyst*. London.
- Keynes, J. M. [1921] 1973. *A Treatise on Probability*. St. Martin's Press and Royal Economic Society. 佐藤隆三訳『確率論』東洋経済新報社, 2010.
- Moiivre, A. de 1738. *The Doctrine of Chances: Or, a Method of Calculating the Probabilities of Events in Play*. 2nd ed. London.
- . 1756. *The Doctrine of Chances: Or, a Method of Calculating the Probabilities of Events in Play*. 3rd ed. London.
- Morison, S. E. 1940. Charles Morton. In Morton, *Compendium Physicae*.
- Morton, C. [1687] 1940. *Charles Morton's Compendium Physicae* (Publications of the Colonial Society of Massachusetts, vol. 33). Boston.
- Newton, I. 1704. *Opticks: Or, a Treatise of the Reflexions, Refractions, Inflexions and Colours of Light. Also Two*

- Treatises of the Species and Magnitude of Curvilinear Figures*. London. 島尾永康訳『光学』岩波文庫, 1983.
- Nokes, D. 1985. *Jonathan Swift, a Hypocrite Reversed: A Critical Biography*. Oxford University Press.
- Phillipson, N. [2010] 2011. *Adam Smith: An Enlightened Life*. Penguin Books. 永井大輔訳『アダム・スミスとその時代』白水社, 2014.
- Price, R. 1983. *The Correspondence of Richard Price, vol. I: July 1748–March 1778*, edited by D. O. Thomas and Bernard Peach. Duke University Press.
- Ross, I. S. [1995] 2010. *The Life of Adam Smith*, 2nd ed. Oxford University Press. 篠原久・只腰親和・松原慶子訳『アダム・スミス伝』シュブリンガー・フェアラーク東京, 2000.
- Simpson, T. 1740. *The Nature and Laws of Chance*. [London:] Edward Cave.
- Simson, R. 1762. *The Elements of Euclid, viz. the First Six Books together with the Eleventh and Twelfth*. Glasgow.
- Stewart, J. 1745. *Sir Isaac Newton's Two Treatises of the Quadrature of Curves, and Analysis by Equations of an Infinite Number of Terms, Explained*. London.
- Swinburne, R. (ed) 2002. *Bayes's Theorem*. The British Academy and Oxford University Press.
- Vickers, I. 1996. *Defoe and the New Sciences*. Cambridge University Press.
- Wallace, Jr., D. D. 2011. *Shapers of English Calvinism, 1660-1714: Variety, Persistence, and Transformation*. Oxford University Press.
- Wood, P. B. 1993. *The Aberdeen Enlightenment: The Arts Curriculum in the Eighteenth Century*. Aberdeen University Press.
- トドハンター, I. [1865] 2017. 安藤洋美訳『確率論史：パスカルからラプラスの時代までの数学史の一断面』現代数学社.
- フィッシャー, R. A. [1959] 1962. 渋谷政昭・竹内啓訳『統計的方法と科学的推論』岩波書店.
- ラプラス [1814] 1997. 内井惣七訳『確率の哲学的試論』岩波文庫.
- ユークリッド 2011. 中村幸四郎・寺阪英孝・伊東俊太郎・池田美恵訳『ユークリッド原論 [追補版]』共立出版.
- 長尾伸一 2004. 『トマス・リード：実在論・幾何学・ユートピア』名古屋大学出版会.
- 水田洋 1996. 「解説：アバディーン啓蒙について bio-bibliographical に」水田洋編『ジェイムズ・ダンバー道徳哲学ノート』一橋大学社会科学古典資料センター.