情報の非対称性とインセンティブ

菅　　準　一

シャノン（Shannon）に倣って情報を不確実性の程度を低減する機能をもつものと捉え、情報のもつ機能をモデル化し定量的に量る試みを概観する。その際メッセージを観察した後に事後確率分布をBayesの法則に基づいて計算する立場をとった。しかしながら、Bayesに対しては根強い反対論があり、事後確率を用いることなく尤度関数、尤度比を用いるべきであるとのフィッシャーの立場もある。情報に非対称性があるとき尤度比が重要な役割を果たすことを見ていく。リスク中立的な企業家（プリンシパル）とリスク回避的な労働者（エージェント）が雇用契約を結ぶケースを考える。エージェントの行動と成果の間には不確実性がありそれを記述する確率モデルがあるとする。プリンシパルがエージェントである労働者の行動を直接指示できる場合には、成果によらない賃金を設定することでエージェントのリスクを完全に負担することがファーストベストな解として得られる。情報の非対称性がありエージェントの行動を直接指示できないときには、インセンティブ問題が発生する。プリンシパルがエージェントである労働者の行動を直接観察できない場合、インセンティブ制約を満たすためにいくつかの行動がエージェントにとって無差別になってしまうような最適解の場合には、無差別な行動のいずれが取られたのか推測する必要が出てくる。このとき尤度比が重要な役割を果たし、尤度比の値が１のときにはファーストベストの解が得られ、それ以外のときにはファーストベストな解から乖離することを数値例を交えて議論した。

キーワード：情報の非対称性、インセンティブ、尤度比

シャノン（Shannon）に倣って情報を不確実性の程度を低減する機能をもつものと捉え、情報のもつ機能をモデル化し定量的に量る試みを概観する。以下では、不確実性が支配する状況とは、複数の事象 $X=(x_1,\ldots,x_N)$ のいずれが起きるか分からない状況にあって、それらの事象が起きる客観的な確率 $P=(p(x_1),\ldots,p(x_N))$ あるいは主観的な確率　$\Xi=$

$(\xi(x_1),\ldots,\xi(x_N))$ が与えられている場合として考える。また、これらの事象に関連して発信されるメッセージを$Y=(y_1,\ldots,y_M)$とし、各事象x_i $(i = 1,\ldots,N)$ が生じたとき、メッセージ y_j $(j=1,\ldots,M)$ が発信される確率は、次のマルコフ行列Aによって与えられるものとする。$A=(a_{ij})=(p(y_j|x_i))$ ここで $a_{ij}\geq 0$ かつ $\sum_{j=1}^{M}a_{ij}=1$ $(i=1,\ldots,N)$

（例 1）明日の天気が発するメッセージとそのマルコフ行列

明日の天気$X=(x_1,x_2,x_3)=$(晴れ, 曇り, 雨)$, P\ or\ \Xi=(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$

夕方の西の空の様子 $Y=(y_1,y_2,y_3)=$(夕焼け, 薄曇り, 黒雲)

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \tag{1}$$

この例では、明日が晴れなら 100 % 夕焼けであり、曇りなら 100 % 薄曇りであり、雨ならば 100 % 黒雲がたれ込めている。したがって逆に夕焼けなら 100 % 明日は晴れであり、薄曇りなら 100 % 明日は曇りであり、黒雲がたれ込めていたなら 100 % 明日は雨である。よってメッセージの受信により不確実性が完全に解消される。このような情報は完全情報と呼ばれる。メッセージが発信される確率が、単位行列で表現される場合は、各メッセージは不確実性を低減させる機能を持ちシャノン（Shannon）の意味での情報であることが分かる。

（例 2）

さて、明日の天気が晴れや雨の場合には（例 1）と同じようなメッセージが送信されるが、明日の天気が曇りのときには、等確率で（夕焼け、薄曇り、黒雲）のメッセージを発信するときは、メッセージは、不確実性を低減する機能をもつ情報なのだろうか。

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\0&0&1\end{pmatrix} \tag{2}$$

これを議論するためには、メッセージの受信の前後において不確実性の大きさを量り、その不確実性の大きさがメッセージを受信することによって小さくなったことを示す必要がある。

不確実性の大きさ

さて、自然が伝えるメッセージが不確実性の大きさを低減させるか否かについて考えるわけであるが、その自然のもつ物理的特性を観察する観察者の立場に徹するならば、自然現象を「晴れ」「曇り」「雨」「夕焼け」「薄曇り」「黒雲」という6つの符号に分類整理して、「晴れ」「曇り」「雨」という投入アルファベットが「夕焼け」「薄曇り」「黒雲」産出アルファベ

ットに変換される通信チャネルと看做すことができ、通信チャネルに関する一般的な理論を適用する道が開かれる。

一般に確率変数が、$x_1, x_2, \ldots, x_n$ なる値を確率 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ でとるとき、不確実性の大きさを量る関数を $H(p_1, \ldots, p_n)$ とし、関数 $f(n)$ を $f(n) = H(\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n})$ とする。このとき、$f(n)$ の単調増加性や加法性 $H(p_1, \ldots, p_n)$ が連続性や組み分け規則などの公理を満たすためには、関数 H は以下の形のものに限られることが知られている。[1]

$$H(p_1, \ldots, p_n) = -C \sum_{i=1}^{n} p_i \, log p_i$$

ここで C は任意の定数であり対数の底は 1 より大である。

そこで、$C = 1$, 対数の底を 2 にとった不確実性の測度 shannon あるいは bit を用いると、

$$H(p_1, \ldots, p_n) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \, log_2 p_i \qquad [shannon(bit)]$$

となる。ただし、$0 \times log_2 0$ が $0 \times +\infty$ となり不定形になるので、$0 \times log_2 0 = 0$ と約束する。これを用いてメッセージが送信される前の不確実性の大きさを計算すると

$$H(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = log_2 3 = 1.58496[shannon(bit)]$$

となる。またメッセージ $y_j, (j = 1, 2, 3)$ を受信した後の不確実性の大きさを求める式は

$$H(p(x_1|y_j), p(x_2|y_j), p(x_3|y_j)) = -\sum_{i=1}^{3} p(x_i|y_j) log_2 p(x_i|y_j), (j = 1, 2, 3)$$

となる。

（例　1）の場合について、メッセージを受け取った後の不確実性の大きさを計算してみる。Bayes の規則を使って、事象 x_i とメッセージ y_j の同時確率分布 $p(x_i \, y_j)$ を計算すると、つぎの行列 B が得られる。

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \tag{3}$$

さらに Bayes の法則を使って、メッセージ y_j を受信したときに事象 x_i が起きる条件付き確率 $p(x_i|y_j)$ を求めると、以下の行列 C を得る。

1 宮沢光一 [1971] 参照

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

したがって、

$$H(p(x_1|y_j), p(x_2|y_j), p(x_3|y_j)) = -\sum_{i=1}^{3} p(x_i|y_j) log_2 p(x_i|y_j) = 0, (j = 1, 2, 3)$$

となり、どのメッセージを受信しても受信後の不確実性の大きさは、0 [shannon(bit)]となる。メッセージ受信前の不確実性の大きさが $H(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = log_2 3$ =1.58496[shannon(bit)] であることから、いずれのメッセージも 1.58496[shannon(bit)] の情報を伝達したと考えることができる。

（例　2）について同様な計算を行うと、

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \tag{6}$$

$$C = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \tag{7}$$

したがって、「夕焼け」というメッセージを受け取ったときには、

$$H(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 0) = -(\frac{3}{4} log_2 \frac{3}{4} + \frac{1}{4} log_2 \frac{1}{4} + 0 log_2 0) = 0.811278[shannon(bit)]$$

の不確実性が残される。これより、「夕焼け」というメッセージは 1.58496−0.811278=0.773681 [shannon(bit)] だけ不確実性を低減させる情報量を持っていることになる。同様にして、「薄曇り」というメッセージの持つ情報量は $H(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) - H(0, 1, 0)$ =1.58496 [shannon(bit)] になる。また、「黒雲」というメッセージは 0.773681 [shannon(bit)] の情報量を持っている。

次にこの通信チャネルがもつと期待できる平均的な情報量を計算するために、通信チャネルを通じたメッセージ受信によってもなお残存する不確実性の期待値を求めてみよう。「夕焼け」「薄曇り」「黒雲」メッセージを受け取る確率はそれぞれ $\frac{4}{9}, \frac{1}{9}, \frac{4}{9}$ であるから、通信チ

ャネルを通じてメッセージを受信した後に残される不確実性の期待値は$\frac{4}{9}\times H(\frac{3}{4},\frac{1}{4},0)+\frac{1}{9}\times H(0,1,0)+\frac{4}{9}\times H(\frac{3}{4},\frac{1}{4},0)$ =0.721136 [shannon(bit)] となる。したがって、この通信チャネルが伝達する平均情報量は 1.58496 − 0.721136 = 0.863824[shannon(bit)] となる。1.58496=$H(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})=(\frac{4}{9}+\frac{1}{9}+\frac{4}{9})H(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ であるから、上で求めた個別のメセージの情報量に基づく期待値とも一致する。

（例　3）各事象が同じ確率でメッセージを配信するケース

明日の天気が「晴れ」「曇り」「雨」のいずれであっても、メッセージを発信する確率が、例えば、(a, b, c) である場合はメッセージの受信が不確実性の大きさを低減しないことは直感的にわかる。実際事象が生じる確率を (p_1, p_2, p_3) ただし $p_1+p_2+p_3=1$ とするとき、

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix} \tag{8}$$

$$B=\begin{pmatrix} ap_1 & bp_1 & cp_1 \\ ap_2 & bp_2 & cp_2 \\ ap_3 & bp_3 & cp_3 \end{pmatrix} \tag{9}$$

$$C=\begin{pmatrix} \frac{ap_1}{ap_1+ap_2+ap_3} & \frac{bp_1}{bp_1+bp_2+bp_3} & \frac{cp_1}{cp_1+cp_2+cp_3} \\ \frac{ap_2}{ap_1+ap_2+ap_3} & \frac{bp_2}{bp_1+bp_2+bp_3} & \frac{cp_2}{cp_1+cp_2+cp_3} \\ \frac{ap_3}{ap_1+ap_2+ap_3} & \frac{bp_3}{bp_1+bp_2+bp_3} & \frac{cp_3}{cp_1+cp_2+cp_3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p_1 & p_1 & p_1 \\ p_2 & p_2 & p_2 \\ p_3 & p_3 & p_3 \end{pmatrix} \tag{10}$$

となって、いずれのメッセージを受信した後も各事象が生じる確率は、メセージ受信前と同じであり不確実性の低減につながらない。したがって、このようなメッセージはシャノンの意味での情報ではない。シャノンの意味での情報であるためには、各事象がメッセージを発信する確率分布が同一であってはいけない。[2]

メッセージ y_j を受け取ったとき果たしてそのメッセージから、どの事象 x_iが発生したかを知る方法について概観してみる。上の例では事象が生起する事前確率 $p(x_i)$ とメッセージ y_jを受信する条件付き確率 $p_{ij}=p(y_j|x_i)$が与えられたとき、Bayes の法則にしたがって、事後確率を求めている。他方事前確率を用いることなくメッセージから事象を推測する尤度

2 明日の天気に関するメッセージが不確実性を低減する機能をもつシャノンの意味における情報であるとしても、それだけでは価値ある情報と呼ぶことはできない。（例　1）で考えたような完全情報でさえ、明日の天気が企業活動や個人の効用に全く影響を与えない状況においては、何の価値も持たないことは明らかである。お金を支払ってまで入手したいと思う価値ある情報とは、不確実性のある状況下で企業の利潤や個人の効用を変動させるものでなければならない。

関数を用いる方法もある。先の条件付き確率 $p_{ij}=p(y_j|x_i)$ は事象 x_i が確定したときにメッセージ y_j が生じる確率法則 $p(y_j|x_i)$ を与えるが、それを逆読みして、メッセージ y_j を受信したときに事象 x_i が生じた尤もらしさを次のような尤度関数で与える。

$$L(x_i|y_j)=\alpha p(y_j|x_i) \qquad \text{ここで } \alpha \text{ は任意の正の定数}$$

すると、メッセージ y_j を受信したときに事象 x_1 が生じた尤もらしさは $L(x_1|y_j)=\alpha p(y_j|x_1)$ であり、メッセージ y_j を受信したときに事象 x_2 が生じた尤もらしさは、$L(x_2|y_j)=\alpha p(y_j|x_2)$ となる。そこで、尤度の比（尤度比）をとって

$$\frac{L(x_2|y_j)}{L(x_1|y_j)}>1 \text{ ならば } x_2 \text{ の方が起きたと考えるのが尤もらしい、}$$

と考える。事象そのものを観察することができなくて、それらに関連づけられたメッセージを観察していずれの事象が生じたか推論し, 意思決定しないといけない状況に置かれる場合には有効な方法である。

経済学や経営学が対象とする意思決定には事象そのものを観察することができなくて、それらに関連づけられたメッセージを観察していずれの事象が生じたか推論し、意思決定しないといけない状況に置かれる場合がある。そのような状況の一つにプリンシパルとエージェントの間で発生するモラルハザードの問題がある。例えば企業家が労働者を雇うとき、労働者がどれくらいのレベルで仕事をしているかを直接モニターできないが、仕事に対する勤勉さと成果の間にはある確率法則があって、成果をもって勤勉さを推し量るような場合である。このとき、賃金は成果にのみ依存する契約形態をとる。[3]

[モデル]

エージェントが行動集合 $a_1,\ldots,a_i,\ldots,a_n$ から行動を一つ選択すると、成果 $x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_m$ のどれかが生じる。ここで、行動と成果の間の確率的関係を次のように表す。いまエージェントが行動 a_i を選択するとき、成果 x_j が生じる確率を p_{ij} で表すことにする。そして企業家（プリンシパル）が成果 x_j を観察したなら、エージェントである労働者に賃金 w_j を支払う契約を結ぶ。プリンシパルは、残りの x_j-w_j を受け取る。プリンシパルはリスク中立的であると仮定しよう。したがって、行動 $a_1,\ldots,a_i,\ldots,a_m$ のうち期待利得 $\sum_{j=1}^{m}p_{ij}(x_j-w_j)$ を最大にするような行動をエージェントに期待すると同時に、成果をエージェントと適切にシェ

3 以下の議論は Salanié [1997] を参考にした。

アするよう賃金 w_j を決定する必要がある。

エージェントは賃金 w_j から効用を得ると同時に、行動を取るコストを支払わないといけない。ここで、行動 a_i を取ることから生ずるコストを a_i で表すことにする。エージェントが行動 a_i をとり、プリンシパルが賃金 w_j で報いるとき、エージェントは $\sum_{j=1}^{m} p_{ij}u(w_j) - a_i$ の期待効用を得るものとする。ここで、$u(\cdot)$は凹で増加関数である。

（エージェントの問題）

エージェントは、賃金契約 $(w_1, \ldots, w_j, \ldots, w_m)$) が提示されたならば、期待効用を最大にするような行動を選択する。

$$\max_{i=1,\ldots,n} (\sum_{j=1}^{m} p_{ij}u(w_j) - a_i)$$

もしエージェントが行動 a_i を選択するならば、以下の$(n-1)$個の $k \neq i$ について誘因制約が成り立たないといけない。

$$\sum_{j=1}^{m} p_{ij}u(w_j) - a_i \geq \sum_{j=1}^{m} p_{kj}u(w_j) - a_k \qquad (IC_k)$$

また、企業で働くことを受け入れるためには、やめても得られる効用 $\bar{U}$ を上回る効用を企業が提供しないといけないので、a_i を選んだときには、次の個人の合理性条件を満たさないといけない。

$$\sum_{j=1}^{m} p_{ij}u(w_j) - a_i \geq \bar{U} \qquad (IR)$$

（プリンシパルの問題）

プリンシパルがエージェントの行動を直接観察できて指示できる場合とそうでない場合とでは、プリンシパルの直面する問題は異なってくる。プリンシパルがエージェントの行動を直接観察できて指示できる場合には、エージェントの誘因制約に頼ることなく行動できて合理性条件のみを考慮すればよい。しかしながら、エージェントの行動を直接観察できずに成果のみが観察可能なケースではエージェントのインセンティブの問題が発生することをふまえて賃金契約を設計する必要がある。以下ではプリンシパルの直面する問題を、行動が直接観察可能な場合とそうでない場合の２つのケースに分けて考える。

（プリンシパルがエージェントの行動を直接観察できて指示できる場合）

プリンシパルがエージェントの行動を直接観察できて指示できる場合には、エージェントの誘因制約に頼ることなく行動できて合理性条件のみを考慮すればよい。

$$\max_{(w_1,;w_m),i} \sum_{j=1}^{m} p_{ij}(x_j - w_j)$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^{m} p_{ij} u(w_j) - a_i \geq \bar{U} \qquad (IR)$$

この問題は、各行動 a_i から得られる期待効用を最大化するように $w_j(a_i)$ を決定し、その後にそれらの最大期待利得 $r(a_i)$ の内で最も大きい値をとる行動を選び出す２段階に分けて解くことができる。

(step 1)

$$r(a_i) = \max_{(w_1,;w_m),\lambda_0} \sum_{j=1}^{m} p_{ij}(x_j - w_j) + \lambda_0 (\sum_{j=1}^{m} p_{ij} u(w_j) - a_i - \bar{U})$$

(step 2)

$$\max_{i=1,\ldots,n} r(a_i)$$

このような場合の、賃金契約が満たすべき条件は、

$$\frac{1}{u'(w_j)} = \lambda_0 \qquad (j = 1, \ldots, m)$$

$$\sum_{j=1}^{m} p_{ij} u(w_j) - a_i = \bar{U}$$

したがって、$u(\cdot)$が単調増加関数ならば、すべての j について賃金を一定にすることが必要である。

$$w_j = \bar{w} \qquad (j = 1, \ldots, m)$$

また、 $\sum_{j=1}^{m} p_{ij} u(\bar{w}) - a_i = \bar{U}$ より、この一定の賃金 $\bar{w}$ は a_i の水準に依存する。

$$\bar{w}(a_i) = u^{-1}(\bar{U} + a_i)$$

となる。エージェントの行動を把握して指示する場合には、エフォートの費用を全部負担し成果とは無関係に一定の賃金を支払うことで、危険回避的なエージェントをリスクから完全に解放することが最適なのである。したがって、エージェントに行動 a_i を取らせるときの期待利潤は $r(a_i) = \sum_{j=1}^{m} p_{ij} x_j - \bar{w}(a_i)$ となる。

(エージェントの行動を直接観察して指示することができない場合)

エージェントの行動を直接観察して指示することができない場合には、エージェントのインセンティブに働きかけてエージェントの行動を制御する必要があり、成果と関連づけた賃金契約をもちいることになる。さきに述べたようにエージェントが行動 a_i を自発的に選ぶには、合理性条件(IR)に加えて、$(n-1)$ 個の $k \neq i$ について誘因制約条件 (IC_k) を満たす必要がある。

$$r(a_i) = \max_{(w_1,;w_m),\lambda_0,\lambda_k} \sum_{j=1}^{m} p_{ij}(x_j - w_j) + \lambda_0 (\sum_{j=1}^{m} p_{ij}u(w_j) - a_i - \bar{U})$$

$$+ \sum_{k \neq i} \lambda_k (\sum_{j=1}^{m} p_{ij}u(w_j) - a_i - \sum_{j=1}^{m} p_{kj}u(w_j) - a_k)$$

このとき賃金契約が満たすべき条件は、

$$\frac{1}{u'(w_j)} = \lambda_0 + \sum_{k \neq i} \lambda_k (1 - \frac{p_{kj}}{p_{ij}})$$

であり、 $\lambda_k > 0$ が成立する k については、行動 a_k は行動 a_i と同じ期待効用をエージェントに約束する。そして成果 x_j に対して支払われる賃金 w_j に対して、$\lambda_k(1 - \frac{p_{kj}}{p_{ij}})$ だけ影響を及ぼすのである。

（数値例）

$$(p_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{3}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{3}{7} & \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{3}{6} \end{pmatrix} \tag{11}$$

$$(x_j) = (3600, 6000, 12000), (a_i) = (10, 20, 30), \bar{U} = 50, u(w) = \sqrt{w}$$

（ケース１：仕事を直接指示できる場合）（ファーストベストな解）

（行動 a_1 を指示）

期待利潤を最大にするためには、労働者の個人的合理性に配慮しながら賃金費用を最小化すればよい。

$$\min_{w_1,w_2,w_3} \sum_{j=1}^{3} p_{1j}w_j$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^{m} p_{1j}u(w_j) - a_1 \geq \bar{U} \qquad (IR) \qquad (\lambda_0)$$

にパラメータの数値や具体的な関数形を代入すると

$$\min_{w_1,w_2,w_3} \frac{3w_1}{6} + \frac{2w_2}{6} + \frac{w_3}{6}$$

s.t.

$$\frac{3\sqrt{w_1}}{6} + \frac{2\sqrt{w_2}}{6} + \frac{\sqrt{w_3}}{6} \geq 60 \qquad (IR) \qquad (\lambda_0)$$

最適性のための Kuhn-Tucker の条件は

$$2\sqrt{w_j} = \lambda_0 \quad (j = 1, 2, 3)$$

$$\frac{3\sqrt{w_1}}{6} + \frac{2\sqrt{w_2}}{6} + \frac{\sqrt{w_3}}{6} = 60$$

となり、$\lambda_0 = 120, w_j = 3600 \quad (j = 1, 2, 3)$ であり最小費用は 3600 となり、最大期待利潤は 2200 となる。

（行動 a_2 や a_3 を指示）

同様に考えてみると、a_2 を指示する場合の最適性のための Kuhn-Tucker の条件は

$$2\sqrt{w_j} = \lambda_0 \quad (j = 1, 2, 3)$$

$$\frac{3\sqrt{w_1}}{7} + \frac{\sqrt{w_2}}{7} + \frac{3\sqrt{w_3}}{7} = 70$$

となる。これを解いて最適解を計算すると $\lambda_0 = 140, w_j = 4900 \quad (j = 1, 2, 3)$ であり最小費用は 4900 となり、最大期待利潤は 2642.86 となる。

a_3 を指示する場合の最適性のための Kuhn-Tucker の条件は

$$2\sqrt{w_j} = \lambda_0 \quad (j = 1, 2, 3)$$

$$\frac{\sqrt{w_1}}{6} + \frac{2\sqrt{w_2}}{6} + \frac{3\sqrt{w_3}}{6} = 80$$

となる。これを解いて最適解を求めると $\lambda_0 = 160, w_j = 6400 \quad (j = 1, 2, 3)$ であり最小費用は 6400 となり、最大期待利潤は 2200 となる。したがって、プリンシパルがエージェントに仕事を指示できるときには仕事 a_2 を遂行しその対価として成果によらない一定の賃金 4900 を支払う契約を結ぶであろう。

（仕事を直接モニターできないケース）

もしエージェントの仕事をモニターできないにも拘わらず、プリンシパルがエージェントと仕事 a_2 を遂行しその対価として成果によらない一定の賃金 4900 を支払う契約を結ぶとしたらどうなるだろうか。どの仕事を選んでも、確率に差異があるとしても結果的にはすべての成果が出現するわけであるから、良くない成果が出現したからといって、エージェントが手抜きをしたと立証できない。エージェントが自分の期待効用が最も高くなる仕事 a_1 を選んだにも拘らず、仕事 a_2 をしたと言い張ったときにはプリンシパルはそれに対抗する手段を持ち合わせていない。エージェントが成果によらない一定の賃金 4900 を受け取って、仕事 a_1 をするときには、プリンシパルの最大期待利潤は 900 にまで減少してしまう。それでは、エージェントの計算づくの利己的行為を織り込みながら、プリンシパルの望む仕事をさ

せるような賃金契約を結ぶことができないであろうか。

（誘因制約条件）

以下ではエージェントの計算づくの利己的行為を織り込みながら、プリンシパルの望む仕事をさせるような誘因を賃金契約に盛り込むことを考えてみる。

（ケース１）エージェントに仕事 a_1 を遂行させるインセンティブを組み込む

期待利潤を最大にするためには、労働者の個人的合理性とインセンティブに配慮しながら賃金費用を最小化すればよい。

$$\min_{w_1,w_2,w_3} \sum_{j=1}^{3} p_{1j}w_j$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^{m} p_{1j}u(w_j) - a_1 \geq \bar{U} \qquad (IR) \qquad (\lambda_0)$$

$$\sum_{j=1}^{m} p_{1j}u(w_j) - a_1 \geq \sum_{j=1}^{m} p_{2j}u(w_j) - a_2 \qquad (IC1) \qquad (\lambda_1)$$

$$\sum_{j=1}^{m} p_{1j}u(w_j) - a_1 \geq \sum_{j=1}^{m} p_{3j}u(w_j) - a_3 \qquad (IC2) \qquad (\lambda_2)$$

先の数値例のパラメータの数値や関数を指定すると、

$$\min_{w_1,w_2,w_3} \frac{3w_1}{6} + \frac{2w_2}{6} + \frac{w_3}{6}$$

s.t.

$$\frac{3\sqrt{w_1}}{6} + \frac{2\sqrt{w_2}}{6} + \frac{\sqrt{w_3}}{6} - 10 \geq 50 \qquad (IR) \qquad (\lambda_0)$$

$$\frac{3\sqrt{w_1}}{6} + \frac{2\sqrt{w_2}}{6} + \frac{\sqrt{w_3}}{6} - 10 \geq \frac{3\sqrt{w_1}}{7} + \frac{\sqrt{w_2}}{7} + \frac{3\sqrt{w_3}}{7} - 20 \qquad (IC1) \qquad (\lambda_1)$$

$$\frac{3\sqrt{w_1}}{6} + \frac{2\sqrt{w_2}}{6} + \frac{\sqrt{w_3}}{6} - 10 \geq \frac{\sqrt{w_1}}{6} + \frac{2\sqrt{w_2}}{6} + \frac{3\sqrt{w_3}}{6} - 30 \qquad (IC2) \qquad (\lambda_2)$$

最適性のための Kuhn-Tucker の条件は

$$2\sqrt{w_j} = \lambda_0 \quad (j = 1,2,3)$$

$$\frac{3\sqrt{w_1}}{6} + \frac{2\sqrt{w_2}}{6} + \frac{\sqrt{w_3}}{6} = 60$$

となり、結果的にはインセンティブ問題が発生しないで、$\lambda_0 = 120, w_j = 3600 \quad (j = 1,2,3)$ であり最小費用は3600となり、最大期待利潤は2200となる。このケースでは、インセンティブに関する制約条件がすべて厳密な不等式で成立しており、エージェントは必ず行動 a_1 を遂行するのである。したがってプリンシパルの期待費用最小化（期待利潤最大化）行動はエージェントのインセンティブ問題をひきおこさないのである。

（ケース２）エージェントに仕事 a_2 を遂行させるインセンティブを組み込む

期待利潤を最大にするためには、労働者の個人的合理性とインセンティブに配慮しながら賃金費用を最小化すればよい。

$$\min_{w_1,w_2,w_3} \sum_{j=1}^{3} p_{2j} w_j$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^{m} p_{2j} u(w_j) - a_2 \geq \bar{U} \qquad (IR) \qquad (\lambda_0)$$

$$\sum_{j=1}^{m} p_{2j} u(w_j) - a_2 \geq \sum_{j=1}^{m} p_{1j} u(w_j) - a_1 \qquad (IC1) \qquad (\lambda_1)$$

$$\sum_{j=1}^{m} p_{2j} u(w_j) - a_2 \geq \sum_{j=1}^{m} p_{3j} u(w_j) - a_3 \qquad (IC2) \qquad (\lambda_2)$$

先の数値例のパラメータの数値や関数を指定すると、

$$\min_{w_1,w_2,w_3} \frac{3w_1}{7} + \frac{w_2}{7} + \frac{3w_3}{7}$$

s.t.

$$\frac{3\sqrt{w_1}}{7} + \frac{\sqrt{w_2}}{7} + \frac{3\sqrt{w_3}}{7} - 20 \geq 50 \qquad (IR) \qquad (\lambda_0)$$

$$\frac{3\sqrt{w_1}}{7} + \frac{\sqrt{w_2}}{7} + \frac{3\sqrt{w_3}}{7} - 20 \geq \frac{3\sqrt{w_1}}{6} + \frac{2\sqrt{w_2}}{6} + \frac{\sqrt{w_3}}{6} - 10 \qquad (IC1) \qquad (\lambda_1)$$

$$\frac{3\sqrt{w_1}}{7} + \frac{\sqrt{w_2}}{7} + \frac{3\sqrt{w_3}}{7} - 20 \geq \frac{\sqrt{w_1}}{6} + \frac{2\sqrt{w_2}}{6} + \frac{3\sqrt{w_3}}{6} - 30 \qquad (IC2) \qquad (\lambda_2)$$

最適性のための Kuhn-Tucker の条件は

$$2\sqrt{w_j} = \lambda_0 + \lambda_1 \left(1 - \frac{p_{1j}}{p_{2j}}\right) \quad (j = 1,2,3)$$

$$\frac{3\sqrt{w_1}}{7} + \frac{\sqrt{w_2}}{7} + \frac{3\sqrt{w_3}}{7} = 70$$

$$\frac{3\sqrt{w_1}}{7}+\frac{\sqrt{w_2}}{7}+\frac{3\sqrt{w_3}}{7}-20=\frac{3\sqrt{w_1}}{6}+\frac{2\sqrt{w_2}}{6}+\frac{\sqrt{w_3}}{6}-10$$

となり、$\lambda_0=140, \lambda_1=\frac{1080}{23}=46.9565$, $w_1=\frac{2310400}{529}=4367.49, w_2=\frac{792100}{529}=1497.35, w_3=\frac{3763600}{529}=7114.56$であり最小期待費用は$\frac{118100}{23}=5134.78$となり、最大期待利潤は$\frac{387700}{161}=2408.07$となる。

（ケース3）エージェントに仕事a_3を遂行させるインセンティブを組み込む

期待利潤を最大にするためには、労働者の個人的合理性とインセンティブに配慮しながら賃金費用を最小化すればよい。

$$\min_{w_1,w_2,w_3}\sum_{j=1}^{3}p_{3j}w_j$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^{m}p_{3j}u(w_j)-a_3\geq\bar{U} \qquad (IR) \qquad (\lambda_0)$$

$$\sum_{j=1}^{m}p_{3j}u(w_j)-a_3\geq\sum_{j=1}^{m}p_{1j}u(w_j)-a_1 \qquad (IC1) \qquad (\lambda_1)$$

$$\sum_{j=1}^{m}p_{3j}u(w_j)-a_3\geq\sum_{j=1}^{m}p_{2j}u(w_j)-a_2 \qquad (IC2) \qquad (\lambda_2)$$

先の数値例のパラメータの数値や関数を指定すると、

$$\min_{w_1,w_2,w_3}\frac{w_1}{6}+\frac{2w_2}{6}+\frac{3w_3}{6}$$

s.t.

$$\frac{\sqrt{w_1}}{6}+\frac{2\sqrt{w_2}}{6}+\frac{3\sqrt{w_3}}{6}-30\geq 50 \qquad (IR) \qquad (\lambda_0)$$

$$\frac{\sqrt{w_1}}{6}+\frac{2\sqrt{w_2}}{6}+\frac{3\sqrt{w_3}}{6}-30\geq\frac{3\sqrt{w_1}}{6}+\frac{2\sqrt{w_2}}{6}+\frac{\sqrt{w_3}}{6}-10 \qquad (IC1) \qquad (\lambda_1)$$

$$\frac{\sqrt{w_1}}{6}+\frac{2\sqrt{w_2}}{6}+\frac{3\sqrt{w_3}}{6}-30\geq\frac{3\sqrt{w_1}}{7}+\frac{\sqrt{w_2}}{7}+\frac{3\sqrt{w_3}}{7}-20 \qquad (IC2) \qquad (\lambda_2)$$

最適性のための Kuhn-Tucker の条件は

$$2\sqrt{w_j}=\lambda_0+\lambda_1(1-\frac{p_{1j}}{p_{3j}}) \quad (j=1,2,3)$$

$$\frac{\sqrt{w_1}}{6}+\frac{2\sqrt{w_2}}{6}+\frac{3\sqrt{w_3}}{6}=80$$

$$\frac{\sqrt{w_1}}{6}+\frac{2\sqrt{w_2}}{6}+\frac{3\sqrt{w_3}}{6}-30=\frac{3\sqrt{w_1}}{6}+\frac{2\sqrt{w_2}}{6}+\frac{\sqrt{w_3}}{6}-10$$

となり、$\lambda_0=160, \lambda_1=45, w_1=1225, w_2=6400, w_3=9025$ 最小費用は6850となり、最大期待利潤は1750となる。

以上の計算結果をまとめると、

期待利潤を最大化するプリンシパルは、行動 a_2 をエージェントに選択させようとすると考えられる。このときの賃金契約は成果 $x_1=3600$ が出現したとき $w_1=4367.49$ を支払い、成果 $x_2=6000$ が出現するときには $w_2=1497.35$ を、成果 $x_3=12000$ のときには $w_3=7114.56$ を支払うという内容になる。したがって、プリンシパルが受け取る利潤は、成果 x_1 が出現したときは $3600-4367.49=-767.49$ であり、成果 x_2 が出現したときは $6000-1497.35=4502.65$ であり、成果 x_3 が出現したときは $12000-7114.56=4885.44$ となる。したがって期待利潤は $\frac{3}{7}\times(-767.49)+\frac{1}{7}\times 4502.65+\frac{3}{7}\times 4885.44=2408.07$ となる。

ここで注意すべき点は、成果 x_1 と x_2 を比較すると、成果は3000から6000と倍増しているが、賃金は逆に4367.49から1497.35へと約 $\frac{1}{3}$ に減っていることである。これはインセンティブ制約において行動 a_1 と a_2 がエージェントに同じ期待効用を与えるように賃金契約を設計するよう求められているからである。プリンシパルは行動 a_2 をとることを望んでいるが、それをエージェントに確実に実行させる手段を欠くのであって、どちらの行動を取るかはエージェントの気分次第という困った状況に置かれることになる。言い換えると、最適解が満たす条件として（IC1）が等号で成立して、ラグランジュ乗数 λ_1 が等号を成立させるような正の値を取ることである。また、行動 a_2 と a_3 に関しては行動 a_2 により大きい期待効用を与えるように賃金契約を設計するよう求められている。つまり（IC2）が厳密な不等号で成立して、ラグランジュ乗数 λ_2 が零となることである。したがって、賃金契約の設計に関しては行動 a_1 と a_2 に関連したインセンティブ制約だけを考慮すれば十分であるが、また行動 a_1 と a_2 のいずれがエージェントによって取られたのかを推量しないといけないことになる。さらに各成果に対する賃金水準を決定するにあたっては、その成果を観察したときに行動 a_1 より所望の行動 a_2 が取られた確率が高いほど賃金を高くするのは合理的である。実際最適解の条件として賃金水準 w_j は尤度比 $\frac{p_{1j}}{p_{2j}}$ の減少関数になっている。尤度比を求めると、$(\frac{21}{18}, \frac{42}{18}, \frac{7}{18})$ であり、成果 x_1, x_2 を観察したときには、尤度比は1より大きいので行動 a_1 がとられた蓋然性が高いと考えられ賃金水準が低く設定される。a_2 を直接指示できたときのファーストベストな賃金水準よりも低く設定されている。それに対して成果 x_3 の場合は尤度比が1より小さく、所望の行動 a_2 が取られた蓋然性が高いと考えられ賃金水準が割り増しされており、a_2 を直接指示できたときのファーストベストな賃金水準よりも高く設定されている。繰り返しになるが、行動 a_1 と a_2 のいずれがエージェントによって取られたのかを推量しないといけないインセンティブ問題があるがために、より大きな成果に対して低い賃金を支払うというパラドックスが発生してるのである。

これに対して行動 a_3 を所望する（ケース3）の場合には、成果 x_1 と x_2, x_3 を比較すると、成果は3000から6000、12000と増加するのに対して賃金は1225から6400、9025へと成果の増加関数になっている。インセンティブ制約において行動 a_1 と a_3 がエージェントに同じ期待効用を与えるように賃金契約を設計するよう求められている事情は（ケース2）と似通っている。プリンシパルはエージェントが行動 a_3 をとることを望んでいるが、それをエージェントに確実に実行させる手段を欠くのであって、行動 a_1 と a_3 のどちらの行動を取るかはエージェントの気分次第で決めればよい問題であるという困った状況に置かれることになる。言い換えると、最適解が満たす条件として（IC1）が等号で成立して、ラグランジュ乗数 λ_1 が等号成立を実現する正の値を取ることである。また、行動 a_2 と a_3 に関しては行動 a_3 により大きい期待効用を与えるように賃金契約を設計するよう求められている。つまり（IC2）が厳密な不等号で成立して、ラグランジュ乗数 λ_2 が零となることである。したがって、賃金契約の設計に関しては行動 a_3 と a_1 に関連したインセンティブ制約だけを考慮すれば十分であって、また行動 a_3 と a_1 のいずれがエージェントによって取られたのかを推量しないといけないことになる。さらに各成果に対する賃金水準を決定するにあたっては、その成果を観察したときに行動 a_1 より所望の行動 a_3 が取られた確率が高いほど賃金を高くするのは合理的である。実際最適解の条件として賃金水準 w_j は尤度比 $\frac{p_{1j}}{p_{3j}}$ の減少関数になっている。尤度比を求めると、$(3,1,\frac{1}{3})$ であり、成果 x_1 を観察したときには、尤度比は1より大きいので行動 a_1 がとられた蓋然性が高いと考えられ賃金水準が低く設定される。a_2 を直接指示できたときのファーストベストな賃金水準よりも低く設定されている。それに対して成果 x_2 の場合は尤度比が1であり、行動 a_1 が取られた蓋然性と行動 a_3 がとられた蓋然性は等しく、a_3 が取られなかったと判断することは困難である。したがって a_3 を直接指示できたときのファーストベストな賃金水準と同じ水準の賃金が設定されている。それに対して成果 x_3 の場合は尤度比が1より小さく、所望の行動 a_3 が取られた蓋然性が高いと考えられ賃金水準が割り増しされており、a_3 を直接指示できたときのファーストベストな賃金水準よりも高く設定されている。繰り返しになるが、行動 a_1 と a_3 のいずれがエージェントによって取られたのかを弁別しないといけないインセンティブ問題があるが（ケース2）のような、より大きな成果に対して低い賃金を支払うというパラドックスは発生しないのである。

参考文献

[1] Bhatti M.Asghar, Practical Optimization Methods with Mathematica Applications, Springer-Verlag New York, Inc., 2000

[2] Billingsley Patrick, Probability and Measure Third Edition, John Wiley & Sons, Inc., 1995

[3] Hastings Kevin, Introduction to Probability with Mathematica, Chapman & Hall / CRC, 2001

[4] Huang Cliff J. and Philip S. Crooke, Mathematics and Mathematica for Economists, Blackwell Publishers, 1997

[5] Ines Macho-Stadler and J. David Perez-Castrillo, An Introduction to the Economics of Information, 2nd ed., Oxford University Press, 2001

[6] Mas-Colell, A., Whinston M.D., and Green J.R., Microeconomic Theory, Oxford University Press, 1995

[7] Salanié, Bernard, The Economics of Contracts, The MIT Press, 1997 （契約の経済学、細江守紀、三浦 功、堀 宣昭 訳　勁草書房　2000年）

[8] 菅 準一　対称情報と制約条件付き 線形最大化問題 : Mathematica を使った数値例, 尾道大学経済情報論集 , Vol. 2 No.1, 2002

[9] 宮沢光一『情報・決定理論序説』岩波書店　1971