2次計画法の解説

小　泉　　　伸

1. はじめに

2次計画問題は制約条件が1次式で，目的関数が2次関数である場合の非線形数理計画問題である。おそらく Markowitz のポートフォリオ理論において有効フロンティアを求める必要性から始まったと思われるが，概ね１９５０年から１９６０年頃に多くの研究がなされている。一般の非線形計画問題と異なり2次計画問題は原理的には有限回の反復計算によって正確な解を得ることができるという特徴を持っている。そのため2次計画問題で近似して反復して解く逐次2次計画法のように，非線形計画問題の解法に重要な役割を果たしている。さらに2次計画問題の解法のために開発された技法が一般の非線形計画問題に拡張され，非線形計画問題の新しい解法を与えている。近年ではオペレーションズ・リサーチで2次整数計画問題の効率的な解法が研究されており，2次計画法の重要性は衰えていない。ただ線形計画法と異なり2次計画法の解法を具体例も含めて解説した書籍は皆無であり，こうしたことを解説することは意味のあることだと考える。なお非線形計画法の解説本は多数出版されているが，例えば [12] が分かり易くまとまっている。また2次計画問題の歴史や概要をまとめたものは [15, 16] が，内点法の2次計画問題への適用については [10] が詳しい。

2. 2次計画法の概要

2次計画問題は制約条件が1次式で，目的関数が2次関数である場合の非線形数理計画問題である。一般には $A \in \mathbb{R}^{m\times n},\ b \in \mathbb{R}^m,\ c \in \mathbb{R}^n,\ Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ としたときに，次の形をした数理計画問題として定式化される。なお Q は半正定値対称行列であるとする。

2次計画問題:QP_1
制約条件
$Ax = b$
$x \in \mathbb{R}^n_+$
目的関数
$z = c'x - \dfrac{1}{2}x'Qx$ を最大にする。

ここで x' は x の転置を表す。また $\mathbb{R}^n_+$ はすべての成分が非負数となる $\mathbb{R}^n$ の部分集合である。一般性を失うことなく $\operatorname{rank} A = m,\ b \in \mathbb{R}^m_+$ と仮定してよいので，以下においてはそのように仮定する。ただこの仮定を明確に使うのは Beale の逆行列法においてである。また簡単のため $x \in \mathbb{R}^n_+$ を $x \geqq 0$ のように書くこともある。

Lagrange 関数は $\lambda \in \mathbb{R}^m,\ \mu \in \mathbb{R}^n_+$ のとき

$$L(x,\lambda,\mu) = c'x - \frac{1}{2}x'Qx + \lambda'(b - Ax) + \mu'x \tag{2.1}$$

と書けるので，Kuhn–Tucker 条件は次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \nabla L(x,\lambda,\mu) = c - Qx - A'\lambda + \mu &= 0 \\ Ax &= b \\ \mu'x &= 0 \end{aligned}$$

これより

$$\mu = Qx + A'\lambda - c$$

となるので

$$x'\mu = x'Qx + \lambda' Ax - c'x = 0$$

となる。また $Ax = b$ であるので

$$x'Qx = c'x - b'\lambda$$

が得られる。従って Kuhn–Tucker 条件を満たすところでは目的関数は

$$z = c'x - \frac{1}{2}x'Qx = \frac{1}{2}c'x + \frac{1}{2}b'\lambda \tag{2.2}$$

と表すことができる。まとめると Kuhn–Tucker 条件は次のように書ける。また Q は半正定値であるので目的関数 z は凹関数となり，これは最大値となるための必要十分条件を与える。

(a) $x \in \mathbb{R}^n_+,\ \mu \in \mathbb{R}^n_+,\ \lambda \in \mathbb{R}^m$
(b) $Ax = b$
(c) $Qx + A'\lambda - \mu = c$
(d) $x'\mu = 0$

ここで最後の条件 (d) を相補性条件という。これは $x,\ \mu$ の第 i 成分を $x_i,\ \mu_i$ としたときに，すべての $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して $x_i\mu_i = 0$ が成り立つことと同じである。x_i を主変数といい，μ_i を x_i に対する双対変数という。

なお場合によっては次のように制約条件を 1 つの不等式にまとめて表した方が便利なこともある。

2 次計画問題:QP_2
制約条件
$Ax \leqq b$
目的関数
$z = c'x - \frac{1}{2}x'Qx$ を最大にする。

ただし $b \in \mathbb{R}^m$ である。このとき Kuhn–Tucker 条件は次のように表すことができる。

(a) $s \in \mathbb{R}^m_+,\ \lambda \in \mathbb{R}^m_+$
(b) $Ax + s = b$
(c) $Qx + A'\lambda = c$
(d) $s'\lambda = 0$

また目的関数は(2.2)と同じになる。もちろんこの 2 つの表現は同値である。例えば QP_1 の表現から QP_2 の表現を得るためには制約条件を

$$Ax \leqq b, \quad -Ax \leqq -b, \quad -Ix \leqq 0$$

と分解すればよい。ここで I は単位行列，0 はすべての成分が 0 の列ベクトルである。また QP_2 の表現から QP_1 の表現を得るためには

$$x = x^+ - x^- \quad (x^+ \geqq 0,\ x^- \geqq 0,\ (x^+)'x^- = 0)$$

と分解し，これにスラック変数 $s \geqq 0$ を入れて制約条件を

$$Ax^+ - Ax^- + s = b$$

と表す。そして b の符号行列 D を掛けて

$$DAx^+ - DAx^- + Ds = |b|$$

とすればよい。ここで b の符号行列というのは対角行列で，対角成分が b の成分が非負のときは 1，負のときは -1 となるものである。また $|b|$ は b の各成分の絶対値を取ったものである。

また 2 次計画問題 QP_1 に対して，次の 2 次計画問題を双対問題という。

2 次計画問題:DQP_1
制約条件
$Qx + A'\lambda - c \in \mathbb{R}^n_+$
$x \in \mathbb{R}^n_+,\ \lambda \in \mathbb{R}^m$
目的関数
$z = b'\lambda + \dfrac{1}{2}x'Qx$ を最小にする。

双対問題 DQP_1 に対して最初の 2 次計画問題 QP_1 を主問題という。主問題 QP_1 と双対問題 DQP_1 は Lagrange 関数が同じ Kuhn–Tucker 条件を与えるので，Q が半正定値であるときは双対問題は主問題と同じ解をもつ。

3. Wolfe の方法

2 次計画問題を解くためには Kuhn–Tucker 条件を満たす x，λ を求めればよいのであるが，場合分けが複雑で実際の数理計画問題のように未知数や制約条件の数が数百，数千ある場合には，これを行うことはほとんど不可能である。そのため数多くの技法が提案されているが，代表的なものは Wolfe([19]) により提案されたシンプレックス法を利用するものである。Wolfe の方法は 2 次計画問題の解法のうちで最も代表的な方法であると思われるので，まず Wolfe の方法について解説する。

2 次計画問題 QP_1 を考える。このとき Kuhn–Tucker 条件は 50頁の条件 (a)–(d) である。ここで $\lambda \in \mathbb{R}^n$ は自由変数であるので

$$\lambda = \lambda^+ - \lambda^- \quad (\lambda^+ \geqq 0,\ \lambda^- \geqq 0,\ (\lambda^+)'\lambda^- = 0) \tag{3.1}$$

と分解する。目的関数(2.2)は

$$z = \frac{1}{2}c'x + \frac{1}{2}b'\lambda^+ - \frac{1}{2}b'\lambda^- \tag{3.2}$$

となる。そして Kuhn–Tucker 条件 (b),(c) に人為変数 $v \in \mathbb{R}^m_+$，$w \in \mathbb{R}^n_+$ を入れる。c の符号行列を D とすると

$$Ax + v = b \tag{3.3}$$

$$DQx + DA'\lambda^+ - DA'\lambda^- + D\mu + w = |c| \tag{3.4}$$

である。Wolfe の方法は(3.3),(3.4)を制約条件として，目的関数

$$V = 1'v \text{ を最小にする。} \tag{3.5}$$

$$W = 1'w \text{ を最小にする。} \tag{3.6}$$

を解くことにより $x,\ \lambda$ を求めるものである。ここで 1 はすべての成分が 1 の列ベクトルである。(3.3)と(3.4)を目的関数に代入すると

$$V + 1'Ax = 1'b \tag{3.7}$$
$$W + d'Qx + d'A'\lambda^+ - d'A'\lambda^- - d'\mu = 1'|c| \tag{3.8}$$

が得られる。ここで $d = D1 \in \mathbb{R}^n$ で c の符号ベクトルと呼ばれる。

これをシンプレックス表にすると次のようになる。

	x	μ	λ^+	λ^-	b
v	A	O	O	O	b
w	DQ	$-D$	DA'	$-DA'$	$\|c\|$
z	$-\frac{1}{2}c'$	$0'$	$-\frac{1}{2}b'$	$\frac{1}{2}b'$	0
W	$d'Q$	$-d'$	$d'A'$	$-d'A'$	$1'\|c\|$
V	$1'A$	$0'$	$0'$	$0'$	$1'b$

ここで(3.1)により，λ^+ と λ^- は同時に基底変数になることはない。また共に非基底変数のときはその成分の符号は逆になり，片一方が基底変数になったときは非基底変数の成分は基底変数と交差する成分が -1 で残りが 0 となる。そのためシンプレックス表には λ^+ のみを λ として記入してシンプレックス表を簡素にすることも行われる。

Wolfe の方法ではまず目的関数 V を最小にするという問題を解いて条件 (b) を満たす解を求める。そして次に目的関数 W を最小にすることで条件 (c) を満たす解を求めるという手順を踏むことになる。ただしこのとき相補性条件 (d) を満たすように基底変数に入れる変数を定めなくてはならない。Wolfe([19]) により Q が正定値対称行列であるときは，上のシンプレックス表を用いることで 2 次計画問題の解を得ることができることが証明されてる。Wolfe はこれを short form と呼んでいる。Q が半正定値で正定値でない場合は $\theta \geqq 0$ として，Kuhn–Tucker 条件の (c) を

$$Qx + A'\lambda - \mu = \theta c$$

として，$\theta = 0$ のときに short form で解いてから θ を順次大きくして解の列を作って解く。Wolfe はこれを long form と呼んでいる。またこれ以外にも半正定値で解を得る方法が複数提案されている ([7, 14])。

ところで数理計画問題では制約条件は不等式で表されることも多いが，その場合はスラック変数かサープラス変数を入れて等式に変換する。この場合は自明な基底変換を行うことにより，$\lambda^+,\ \lambda^-$ を含まない簡素なシンプレックス表を作ることができる。例えば次の 2 次計画問題を考える。

2 次計画問題:QP_3
制約条件
$Ax \leqq b$
$x \in \mathbb{R}^n_+$
目的関数
$z = c'x - \dfrac{1}{2}x'Qx$ を最大にする。

この場合は制約条件にスラック変数 $s \in \mathbb{R}^m_+$ を加えて

$$Ax + s = b, \quad \begin{pmatrix} A & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix} = b$$

とする。目的関数は

$$z = \begin{pmatrix} c' & 0' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x' & s' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & O \\ O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix}$$

と表される。c の符号行列を D とすると，$\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m},\ w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m}$ に対して(3.3),(3.4)は次のように書ける。

$$\begin{aligned} & Ax + s + v = b \\ & DQx + DA'\lambda^+ - DA'\lambda^- - D\mu_1 + w_1 = |c| \\ & \lambda^+ - \lambda^- - \mu_2 + w_2 = 0 \end{aligned}$$

従ってシンプレックス表は次のよう書くことができる。

	x	s	μ_1	μ_2	λ^+	λ^-	b
v	A	I	O	O	O	O	b
w_1	DQ	O	$-D$	O	DA'	$-DA'$	$\|c\|$
w_2	O	O	O	$-I$	I	$-I$	0
z	$-\frac{1}{2}c'$	$0'$	$0'$	$0'$	$-\frac{1}{2}b'$	$\frac{1}{2}b'$	0
W	$d'Q$	$0'$	$-d'$	$-1'$	$d'A' + 1'$	$-d'A' - 1'$	$1'\|c\|$
V	$1'A$	$1'$	$0'$	$0'$	$0'$	$0'$	$1'b$

ここで v と s，w_2 と λ^+ で基底交換を行う。

	x	μ_1	μ_2	λ^-	b
s	A	O	O	O	b
w_1	DQ	$-D$	DA'	O	$\|c\|$
λ^+	O	O	$-I$	$-I$	0
z	$-\frac{1}{2}c'$	$0'$	$-\frac{1}{2}b'$	$0'$	0
W	$d'Q$	$-d'$	$d'A'$	$0'$	$1'\|c\|$
V	$0'$	$0'$	$0'$	$0'$	0

そして λ^+ の行，V の行と λ^- の列をシンプレックス表から除いて，μ_1 を μ，μ_2 を λ，w_1 を w とおくと，次のシンプレックス表が得られる。

	x	μ	λ	b
s	A	O	O	b
w	DQ	$-D$	DA'	$\|c\|$
z	$-\frac{1}{2}c'$	$0'$	$-\frac{1}{2}b'$	0
W	$d'Q$	$-d'$	$d'A'$	$1'\|c\|$

相補性条件は $x'\mu = 0,\ \lambda's = 0$ である。また目的関数は相補性条件を満たすところでは

$$z = \frac{1}{2}c'x + \frac{1}{2}b'\lambda$$

と表される。

次に以下の２次計画問題を考える。

２次計画問題:QP_4

制約条件

$Ax \geqq b$

$x \in \mathbb{R}^n_+$

目的関数

$z = c'x - \dfrac{1}{2}x'Qx$ を最大にする。

この場合は制約条件にサープラス変数 $s \in \mathbb{R}^m_+$ を加えて

$$Ax - s = b, \quad \begin{pmatrix} A & -I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix} = b$$

とする。後は同じ議論により

$$\begin{aligned} &Ax - s + v = b \\ &DQx + DA'\lambda^+ - DA'\lambda^- - D\mu_1 + w_1 = |c| \\ &-\lambda^+ + \lambda^- - \mu_2 + w_2 = 0 \end{aligned}$$

となるので，シンプレックス表は次のようになる。

	x	s	μ_1	μ_2	λ^+	λ^-	b
v	A	$-I$	O	O	O	O	b
w_1	DQ	O	$-D$	O	DA'	$-DA'$	$\lvert c\rvert$
w_2	O	O	O	$-I$	$-I$	I	0
z	$-\frac{1}{2}c'$	$0'$	$0'$	$0'$	$-\frac{1}{2}b'$	$\frac{1}{2}b'$	0
W	$d'Q$	$0'$	$-d'$	$-1'$	$d'A' - 1'$	$-d'A' + 1'$	$1'\lvert c\rvert$
V	$1'A$	$-1'$	$0'$	$0'$	$0'$	$0'$	$1'b$

ここで w_2 と λ^- で基底交換を行う。

	x	s	μ_1	μ_2	λ^+	b
v	A	$-I$	O	O	O	b
w_1	DQ	O	$-D$	DA'	O	$\lvert c\rvert$
λ^-	O	O	O	$-I$	$-I$	0
z	$-\frac{1}{2}c'$	$0'$	$0'$	$\frac{1}{2}b'$	$0'$	0
W	$d'Q$	$0'$	$-d'$	$d'A'$	$0'$	$1'\lvert c\rvert$
V	$1'A$	$-1'$	$0'$	$0'$	$0'$	$1'b$

そして λ^- の行と λ^+ の列をシンプレックス表から除いて，μ_1 を μ，μ_2 を λ，w_1 を w とおくと，次のシンプレックス表が得られる。

	x	s	μ	λ	b
v	A	$-I$	O	O	b
w	DQ	O	$-D$	DA'	$\lvert c\rvert$
z	$-\frac{1}{2}c'$	$0'$	$0'$	$\frac{1}{2}b'$	0
W	$d'Q$	$0'$	$-d'$	$d'A'$	$1'\lvert c\rvert$
V	$1'A$	$-1'$	$0'$	$0'$	$1'b$

相補性条件は $x'\mu = 0,\ \lambda' s = 0$ である。また目的関数は相補性条件を満たすところでは

$$z = \frac{1}{2}c'x - \frac{1}{2}b'\lambda$$

と表される。

例題 3.1　次の２次計画問題を解け。

制約条件

$x_1 + 2x_2 = 1$

$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0$

目的関数

$z = 3x_1 + 4x_2 - 2x_1^2 - x_1x_2 - x_2^2$ を最大にする。

Lagrange 関数は

$$L(x, \lambda, \mu) = 3x_1 + 4x_2 - 2x_1^2 - x_1x_2 - x_2^2 + \lambda(x_1 + 2x_2 - 1) + \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2$$

であるので，Kuhn–Tucker 条件は

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{\nabla} L(x, \lambda, \mu) = \begin{pmatrix} 3 - 4x_1 - x_2 - \lambda + \mu_1 \\ 4 - x_1 - 2x_2 - 2\lambda + \mu_2 \end{pmatrix} = 0 \\
x_1 + 2x_2 = 1 \\
x_1\mu_1 = 0, \quad x_2\mu_2 = 0 \\
x_1 \geqq 0, \quad \mu_1 \geqq 0, \quad x_2 \geqq 0, \quad \mu_2 \geqq 0
\end{gathered}$$

となる。また相補性条件が成り立つところでは目的関数は

$$z = \frac{3}{2}x_1 + 2x_2 + \frac{1}{2}\lambda$$

となる。$\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$ $(\lambda^+ \geqq 0,\ \lambda^- \geqq 0)$ と分解し，人為変数を入れると次の数理計画問題になる。

$$\begin{aligned}
&x_1 + 2x_2 + v = 1 \\
&4x_1 + x_2 + \lambda^+ - \lambda^- - \mu_1 + w_1 = 3 \\
&x_1 + 2x_2 + 2\lambda^+ - 2\lambda^- - \mu_2 + w_2 = 4 \\
&V = v \text{ を最小にする。} \\
&W = w_1 + w_2 \text{ を最小にする。}
\end{aligned}$$

目的関数 $V,\ W$ から人為変数 v, w_1, w_2 を消去すると

$$\begin{aligned}
&V + x_1 + 2x_2 = 1 \\
&W + 5x_1 + 3x_2 + 3\lambda^+ - 3\lambda^- - \mu_1 - \mu_2 = 7
\end{aligned}$$

となるのでこれをシンプレックス表に入れる。後は次のように解くことができる。

	x_1	x_2	μ_1	μ_2	λ^+	λ^-	b
v	1	$\boxed{2}$	0	0	0	0	1
w_1	4	1	-1	0	1	-1	3
w_2	1	2	0	-1	2	-2	4
z	$-\frac{3}{2}$	-2	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
W	5	3	-1	-1	3	-3	7
V	1	$\underline{2}$	0	0	0	0	1

	x_1	μ_1	μ_2	λ^+	λ^-	b
x_2	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$
w_1	$\boxed{\frac{7}{2}}$	-1	0	1	-1	$\frac{5}{2}$
w_2	0	0	-1	2	-2	3
z	$-\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
W	$\underline{\frac{7}{2}}$	-1	-1	3	-3	$\frac{11}{2}$
V	0	0	0	0	0	0

	μ_1	μ_2	λ^+	λ^-	b
x_2	$\frac{1}{7}$	0	$-\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$
x_1	$-\frac{2}{7}$	0	$\frac{2}{7}$	$-\frac{2}{7}$	$\frac{5}{7}$
w_2	0	-1	2	-2	3
z	$-\frac{1}{7}$	0	$-\frac{5}{14}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{19}{14}$
W	0	-1	$\underline{2}$	-2	3

	μ_1	μ_2	λ^-	b
x_2	$\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{14}$	0	$\frac{5}{14}$
x_1	$-\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	0	$\frac{2}{7}$
λ^+	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$\frac{3}{2}$
z	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{5}{28}$	0	$\frac{53}{28}$
W	0	0	0	0

従って $x_1 = \frac{2}{7}$, $x_2 = \frac{5}{14}$ のとき最大値 $z = \frac{53}{28}$ をとる。

例題 3.2　次の2次計画問題を解け。

制約条件

$x_1 + 4x_2 \leqq 4$

$x_1 + x_2 \leqq 2$

$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0$

目的関数

$z = 2x_1 + 3x_2 - x_1^2 - x_2^2$ を最大にする。

Lagrange 関数は

$$\begin{aligned} L(x,\lambda,\mu) = 2x_1 + 3x_2 - x_1^2 - x_2^2 + \lambda_1(4 - x_1 - 4x_2) + \lambda_2(2 - x_1 - x_2) \\ + \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 \end{aligned}$$

となるので，Kuhn–Tucker 条件は次のように書ける。

$$\begin{gathered} \boldsymbol{\nabla} L(x,\lambda,\mu) = \begin{pmatrix} 2 - 2x_1 - \lambda_1 - \lambda_2 + \mu_1 \\ 3 - 2x_2 - 4\lambda_1 - \lambda_2 + \mu_2 \end{pmatrix} = 0 \\ \lambda_1(4 - x_1 - 4x_2) = 0 \\ \lambda_1 \geqq 0, \qquad x_1 + 4x_2 \leqq 4 \\ \lambda_2(2 - x_1 - x_2) = 0 \\ \lambda_2 \geqq 0, \qquad x_1 + x_2 \leqq 2 \\ \mu_1 x_1 = 0, \qquad \mu_2 x_2 = 0 \\ \mu_1 \geqq 0, \quad x_1 \geqq 0, \quad \mu_2 \geqq 0, \quad x_2 \geqq 0 \end{gathered}$$

制約条件にスラック変数を導入すると

$$\begin{gathered} x_1 + 4x_2 + s_1 = 4 \\ x_1 + x_2 + s_2 = 2 \end{gathered}$$

となるので，相補性条件は

$$\lambda_1 s_1 = 0, \quad \lambda_2 s_2 = 0, \quad \mu_1 x_1 = 0, \quad \mu_2 x_2 = 0 \tag{3.9}$$

と書くことができる。また相補性条件が成り立つところでは目的関数は

$$z = x_1 + \frac{3}{2}x_2 + 2\lambda_1 + \lambda_2$$

となる。

これをシンプレックス法で解くために Kuhn–Tucker 条件の最初の式に人為変数 $w_1,\ w_2$ を入れる。

$$\begin{aligned} x_1 &+ 4x_2 + s_1 = 4 \\ x_1 &+ x_2 + s_2 = 2 \\ 2x_1 &+ \lambda_1 + \lambda_2 - \mu_1 + w_1 = 2 \\ 2x_2 &+ 4\lambda_1 + \lambda_2 - \mu_2 + w_2 = 3 \\ W &= w_1 + w_2 \text{ を最小にする。} \end{aligned}$$

目的関数から人為変数を消去すると

$$W + 2x_1 + 2x_2 + 5\lambda_1 + 2\lambda_2 - \mu_1 - \mu_2 = 5$$

となるので，次のシンプレックス表を作ることができる。これは 53頁のシンプレックス表と同じ形式である。

	x_1	x_2	λ_1	λ_2	μ_1	μ_2	b
s_1	1	4	0	0	0	0	4
s_2	1	1	0	0	0	0	2
w_1	2	0	1	1	-1	0	2
w_2	0	2	4	1	0	-1	3
z	-1	$-\frac{3}{2}$	-2	-1	0	0	0
W	2	2	5	2	-1	-1	5

ここで W の係数が一番大きいのは λ_1 であるが，相補性条件(3.9)により λ_1 と s_1 は同時に基底変数にすることができない。それで相補性条件を満たすように x_1 を基底変数に入れる。これによりシンプレックス表は次のように変形することができる。

	x_2	λ_1	λ_2	μ_1	μ_2	b
s_1	4	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	3
s_2	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1
x_1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	1
w_2	2	4	1	0	-1	3
z	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	1
W	2	4	1	0	-1	3

ここでも相補性条件(3.9)から λ_1 は基底変数に入れることができないので，x_2 を基底変数に入れる。

	s_1	λ_1	λ_2	μ_1	μ_2	b
x_2	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{3}{4}$
s_2	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{8}$	$-\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{1}{4}$
x_1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	1
w_2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{17}{4}$	$\frac{5}{4}$	$-\frac{1}{4}$	-1	$\frac{3}{2}$
z	$\frac{3}{8}$	$-\frac{27}{16}$	$-\frac{11}{16}$	$-\frac{5}{16}$	0	$\frac{17}{8}$
W	$-\frac{1}{2}$	$\frac{17}{4}$	$\frac{5}{4}$	$-\frac{1}{4}$	-1	$\frac{3}{2}$

	s_1	λ_2	μ_1	μ_2	b
x_2	$\frac{4}{17}$	$-\frac{3}{34}$	$\frac{2}{17}$	$-\frac{1}{34}$	$\frac{27}{34}$
s_2	$-\frac{5}{17}$	$-\frac{9}{34}$	$-\frac{6}{17}$	$-\frac{3}{34}$	$\frac{13}{34}$
x_1	$\frac{1}{17}$	$\frac{6}{17}$	$-\frac{8}{17}$	$\frac{2}{17}$	$\frac{14}{17}$
λ_1	$-\frac{2}{17}$	$\frac{5}{17}$	$-\frac{1}{17}$	$-\frac{4}{17}$	$\frac{6}{17}$
z	$\frac{3}{17}$	$-\frac{13}{68}$	$-\frac{7}{17}$	$-\frac{27}{68}$	$\frac{185}{68}$
W	0	0	0	0	0

これより $x_1 = \frac{14}{17}$，$x_2 = \frac{27}{34}$ のとき最大値 $z = \frac{185}{68}$ をとるとなる。
例題 3.3　次の２次計画問題を解け。

制約条件
$x_1 + x_2 \geqq 4$
$x_1 + 2x_2 \geqq 6$
$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0$
目的関数
$z = -4x_1 + 2x_2 - x_1^2 - x_2^2$ を最大にする。

Lagrange 関数は

$$\begin{aligned} L(x, \lambda, \mu) = &-4x_1 + 2x_2 - x_1^2 - x_2^2 + \lambda_1(x_1 + x_2 - 4) + \lambda_2(x_1 + 2x_2 - 6) \\ &+ \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 \end{aligned}$$

となるので，Kuhn–Tucker 条件は次のように書ける。

$$\nabla L(x, \lambda, \mu) = \begin{pmatrix} -4 - 2x_1 + \lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 \\ 2 - 2x_2 + \lambda_1 + 2\lambda_2 + \mu_2 \end{pmatrix} = 0$$
$$\lambda_1(x_1 + x_2 - 4) = 0$$
$$\lambda_1 \geqq 0, \qquad x_1 + x_2 \geqq 4$$
$$\lambda_2(x_1 + 2x_2 - 6) = 0$$
$$\lambda_2 \geqq 0, \qquad x_1 + 2x_2 \geqq 6$$
$$\mu_1 x_1 = 0, \qquad \mu_2 x_2 = 0$$
$$\mu_1 \geqq 0, \quad x_1 \geqq 0, \quad \mu_2 \geqq 0, \quad x_2 \geqq 0$$

制約条件にサープラス変数を導入すると

$$x_1 + x_2 - s_1 = 4$$
$$x_1 + 2x_2 - s_2 = 6$$

となるので，相補性条件は

$$\lambda_1 s_1 = 0, \quad \lambda_2 s_2 = 0, \quad \mu_1 x_1 = 0, \quad \mu_2 x_2 = 0 \tag{3.10}$$

と書くことができる。また相補性条件が成り立つところでは目的関数は

$$z = -2x_1 + x_2 - 2\lambda_1 - 3\lambda_2$$

となる。

これをシンプレックス法で解くために Kuhn–Tucker 条件に人為変数を入れる。

$$\begin{aligned} x_1 &+ x_2 - s_1 + v_1 = 4 \\ x_1 &+ 2x_2 - s_2 + v_2 = 6 \\ -2x_1 &+ \lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 + w_1 = 4 \\ 2x_2 &- \lambda_1 - 2\lambda_2 - \mu_2 + w_2 = 2 \\ V &= v_1 + v_2 \text{ を最小にする。} \\ W &= w_1 + w_2 \text{ を最小にする。} \end{aligned}$$

目的関数から人為変数を消去すると

$$V + 2x_1 + 3x_2 - s_1 - s_2 = 10$$
$$W - 2x_1 + 2x_2 - \lambda_2 + \mu_1 - \mu_2 = 6$$

となるので，次のシンプレックス表を作ることができる。これは 55頁のシンプレックス表と同じ形式である。

	x_1	x_2	s_1	s_2	λ_1	λ_2	μ_1	μ_2	b
v_1	1	1	-1	0	0	0	0	0	4
v_2	1	2	0	-1	0	0	0	0	6
w_1	-2	0	0	0	1	1	1	0	4
w_2	0	2	0	0	-1	-2	0	-1	2
z	2	-1	0	0	2	3	0	0	0
W	-2	2	0	0	0	-1	1	-1	6
V	2	3	-1	-1	0	0	0	0	10

	x_1	s_1	s_2	λ_1	λ_2	μ_1	μ_2	b
v_1	1	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	3
v_2	1	0	-1	1	2	0	1	4
w_1	-2	0	0	1	1	1	0	4
x_2	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	-1	0	$-\frac{1}{2}$	1
z	2	0	0	$\frac{3}{2}$	2	0	$-\frac{1}{2}$	1
W	-2	0	0	1	1	1	0	4
V	2	-1	-1	$\frac{3}{2}$	3	0	$\frac{3}{2}$	7

	x_1	s_1	s_2	λ_1	μ_1	μ_2	b
v_1	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	0	0	0	1
λ_2	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2
w_1	$-\frac{5}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	2
x_2	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	3
z	1	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	-3
W	$-\frac{5}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	2
V	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	0	0	0	1

	s_1	s_2	λ_1	μ_1	μ_2	b
x_1	-2	1	0	0	0	2
λ_2	1	-1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
w_1	-5	3	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	7
x_2	1	-1	0	0	0	2
z	2	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	-5
W	-5	3	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	7
V	0	0	0	0	0	0

ここで相補性条件(3.10)から s_2，μ_1 は基底変数に入れることができないので，λ_1 を基底変数に入れる。

	s_1	s_2	λ_2	μ_1	μ_2	b
x_1	-2	1	0	0	0	2
λ_1	2	-2	2	0	1	2
w_1	-6	4	-1	1	-1	6
x_2	1	-1	0	0	0	2
z	1	1	-1	0	-2	-6
W	-6	4	-1	1	-1	6

	s_1	λ_2	μ_1	μ_2	b
x_1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
λ_1	-1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	5
s_2	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$
x_2	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{7}{2}$
z	$\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{7}{4}$	$-\frac{15}{2}$
W	0	0	0	0	0

これより $x_1 = \frac{1}{2}$，$x_2 = \frac{7}{2}$ のとき最大値 $z = -\frac{15}{2}$ をとるとなる。

4. Frank–Wolfe のアルゴリズム

Frank–Wolfe のアルゴリズムは逐次線形計画法とも呼べるアルゴリズムで，線形計画問題で近似して反復して解くことにより解を得る方法である。もともとは [6] で２次計画問題の解法のために開発されたアルゴリズムであるが，現在は多くの非線形計画問題に拡張されている。

２次計画問題 QP_1 を考える。このとき Kuhn–Tucker 条件は 50頁の条件 (a)–(d) である。Frank–Wolfe のアルゴリズムでは相補性条件 (d) を無視した解を求めてから，相補性条件を目的関数とする線形計画問題を反復して解くことにより，相補性条件を満たす解を得るという手順を踏む。まず Wolfe の方法で作成した 52頁のシンプレックス表を相補性条件を考慮しないでシンプレックス法で解く。そして $u = \begin{pmatrix} x \\ \mu \end{pmatrix}$，$u^\dagger = \begin{pmatrix} \mu' & x' \end{pmatrix}$ とおく。このとき

$$u^\dagger u = 2x'\mu$$

となるので，相補性条件を満たすときは $u^\dagger u = 0$ である。それで $u^\dagger$ をシンプレックス表から得られた $x,\ \mu$ に置き換えて，目的関数 $U = u^\dagger u$ を最小にするという線形計画問題を繰り返し解くことにより相補性条件を満たす解を得ることができる。

最初は 52頁のシンプレックス表を解いて得られた $x,\ \mu$ を u_0 として解き始める。そして k ステップの解 u_k が得られたとして，目的関数

$$U_k = u_k^\dagger u \text{ を最小にする。} \tag{4.1}$$

という線形計画問題を解く。そうするとシンプレックス法の各サイクルで

$$u_k^\dagger u_k > u_k^\dagger u(1) > u_k^\dagger u(2) > \cdots > u_k^\dagger u(h)$$

となる解の列が得られる。ここで次のいずれかの条件を満たす解が得られたらそこで停止する。

(i) $u(h)^\dagger u(h) = 0$
(ii) $u_k^\dagger u(h) \leqq \frac{1}{2} u_k^\dagger u_k$

ここで (i) を満たす解 $u(h)$ が得られれば，相補性条件を満たす解が得られたことになる。(ii) を満たす解 $u(h)$ が得られれば，以下で得られる u_{k+1} を用いて繰り返しシンプレックス法を適用する。つまり降下方向を $u(h) - u_k$，降下幅を α として最急降下法を用いる。

$$\alpha = \min\left\{\frac{u_k^\dagger(u_k - u(h))}{(u(h)-u_k)^\dagger(u(h)-u_k)}, 1\right\} \tag{4.2}$$

$$u_{k+1} = u_k + \alpha(u(h) - u_k) \tag{4.3}$$

もし (i) と (ii) を両方満たすときは，$\alpha = 1$ となるので $u_{k+1} = u(h)$ となり，いずれにしても $u(h)$ が相補性条件を満たす解になる。

これを例題 3.2 の解法に用いると次のようになる。シンプレックス表は 58頁で与えたように次の通りである。

	x_1	x_2	λ_1	λ_2	μ_1	μ_2	b
s_1	1	4	0	0	0	0	4
s_2	1	1	0	0	0	0	2
w_1	2	0	1	1	-1	0	2
w_2	0	2	4	1	0	-1	3
z	-1	$-\frac{3}{2}$	-2	-1	0	0	0
W	2	2	5	2	-1	-1	5

Frank–Wolfe のアルゴリズムでは相補性条件を考慮しないで操作するので次のように変形される。

	x_1	x_2	λ_2	μ_1	μ_2	b
s_1	1	4	0	0	0	4
s_2	1	1	0	0	0	2
w_1	2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	-1	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$
λ_1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
z	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
W	2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	-1	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$

	x_2	λ_2	μ_1	μ_2	b
s_1	$\frac{17}{4}$	$-\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{27}{8}$
s_2	$\frac{5}{4}$	$-\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{11}{8}$
x_1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{8}$
λ_1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
z	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{8}$	$\frac{17}{8}$
W	0	0	0	0	0

これで操作は終了したが $\lambda_1 s_1 = \frac{81}{32} \neq 0$ であるので相補性条件を満たしていない。それで次に相補性条件を満たす解を得ることにする。このシンプレックス表から

$$u_0 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & \mu_1 & \mu_2 & \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \frac{5}{8} & 0 & \frac{27}{8} & \frac{11}{8} & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}'$$

である。これより目的関数は

$$U_0 = u_0^\dagger u = \frac{3}{4}s_1 + \frac{5}{8}\mu_1 + \frac{27}{8}\lambda_1 + \frac{11}{8}\lambda_2 \text{ を最小にする。} \tag{4.4}$$

となり，この目的関数をシンプレックス表の W の代わりに入れて新しい線形計画問題として解くことになる。ただ(4.4)はそのままではシンプレックス表には入れられないので，シンプレックス表の s_1 の行と λ_1 の行を用いて，(4.4)から s_1，λ_1 を消去して

$$U_0 + \frac{39}{8}x_2 - \frac{13}{16}\lambda_2 - \frac{1}{4}\mu_1 - \frac{15}{16}\mu_2 = \frac{81}{16} \tag{4.5}$$

と表す。これを目的関数としてシンプレックス表に入れると次のようになる。

	x_2	λ_2	μ_1	μ_2	b
s_1	$\frac{17}{4}$	$-\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{27}{8}$
s_2	$\frac{5}{4}$	$-\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{11}{8}$
x_1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{8}$
λ_1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
z	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{8}$	$\frac{17}{8}$
U_0	$\frac{39}{8}$	$-\frac{13}{16}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{15}{16}$	$\frac{81}{16}$

ここで s_1 と x_1 で基底交換をする。

	s_1	λ_2	μ_1	μ_2	b
x_2	$\frac{4}{17}$	$-\frac{3}{34}$	$\frac{2}{17}$	$-\frac{1}{34}$	$\frac{27}{34}$
s_2	$-\frac{5}{17}$	$-\frac{9}{34}$	$\frac{6}{17}$	$-\frac{3}{34}$	$\frac{13}{34}$
x_1	$\frac{1}{17}$	$\frac{6}{17}$	$-\frac{8}{17}$	$\frac{2}{17}$	$\frac{14}{17}$
λ_1	$-\frac{2}{17}$	$\frac{5}{17}$	$-\frac{1}{17}$	$-\frac{4}{17}$	$\frac{6}{17}$
z	$\frac{3}{17}$	$-\frac{13}{68}$	$-\frac{7}{17}$	$-\frac{27}{68}$	$\frac{185}{68}$
U_0	$-\frac{39}{34}$	$-\frac{13}{34}$	$-\frac{14}{17}$	$-\frac{27}{34}$	$\frac{81}{68}$

これは相補性条件を満たすので，$x_1 = \frac{14}{17}$，$x_2 = \frac{27}{34}$ のとき最大値 $z = \frac{185}{68}$ をとるとなる。これは先に述べた条件 (i) と (ii) を両方満たしているが，その場合は相補性条件を満たす解として処理すればよい。また目的関

数 U_0 の値は最終的に 0 になるのでなく，あくまで相補性条件を満たすシンプレックス表が得られたかで判断することに注意しておく。

次に例題 3.3 を用いて行う。まず 61頁の上のシンプレックス表までは同じで次のようになる。

	s_1	s_2	λ_1	μ_1	μ_2	b
x_1	-2	1	0	0	0	2
λ_2	1	-1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
w_1	-5	3	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	7
x_2	1	-1	0	0	0	2
z	2	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	-5
W	-5	3	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	7

相補性条件を考慮しないで目的関数 W を最小にしてよいので，s_2 を基底変数に入れる。

	s_1	x_1	λ_1	μ_1	μ_2	b
s_2	-2	1	0	0	0	2
λ_2	-1	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	3
w_1	1	-3	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	1
x_2	-1	1	0	0	0	4
z	2	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	-5
W	1	-3	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	1

	s_1	x_1	λ_1	μ_2	b
s_2	-2	1	0	0	2
λ_2	-1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	3
μ_1	1	-3	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1
x_2	-1	1	0	0	4
z	2	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	-5
W	0	0	0	0	0

これは $s_2\lambda_2 = 6 \neq 0$ であるので，相補性条件を満たさない。ここから相補性条件を満たすシンプレックス表を導く。このシンプレックス表から

$$u_0 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & \mu_1 & \mu_2 & \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}'$$

である。このとき $u_0^{\dagger} u_0 = 12$ となる。これより目的関数は

$$U_0 = u_0^{\dagger} u = x_1 + 3s_2 + 4\mu_2 + 2\lambda_2 \text{ を最小にする。} \tag{4.6}$$

となり，この目的関数をシンプレックス表の W の代わりに入れて新しい線形計画問題として解くことになる。(4.6)はそのままではシンプレックス表には入らないので，目的関数(4.6)から s_2，λ_2 を消去して

$$U_0 + 4x_1 - 8s_1 - 3\mu_2 + \lambda_1 = 12 \tag{4.7}$$

とする。これを目的関数としてシンプレックス表に入れると次のようになる。

	s_1	x_1	λ_1	μ_2	b
s_2	-2	1	0	0	2
λ_2	-1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	3
μ_1	1	-3	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1
x_2	-1	1	0	0	4
z	2	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	-5
U_0	-8	4	1	-3	12

ここで x_1 を基底変数に入れる。

	s_1	s_2	λ_1	μ_2	b
x_1	-2	1	0	0	2
λ_2	-1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
μ_1	-5	3	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	7
x_2	1	-1	0	0	2
z	2	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	-5
U_0	0	-4	1	-3	4

これは条件 (ii) を満たすのでここで停止する。このシンプレックス表から

$$u(1) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & \mu_1 & \mu_2 & \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}'$$

である。(4.2),(4.3)から u_1 を計算すると

$$(u(1) - u_0)^\dagger (u(1) - u_0) = 32, \quad u_0^\dagger (u_0 - u(1)) = 8$$

であるので $\alpha = \frac{1}{4}$ となり，これより

$$u_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & 0 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}'$$

が得られる。従って目的関数は

$$U_1 = u_1^\dagger u = \frac{5}{2}x_1 + \frac{5}{2}s_2 + \frac{1}{2}\mu_1 + \frac{7}{2}\mu_2 + \frac{3}{2}\lambda_2 \text{ を最小にする。} \tag{4.8}$$

となり，この目的関数をシンプレックス表の U_0 の代わりに入れて新しい線形計画問題として解く。目的関数(4.8)から x_1, μ_1, λ_2 を消去すると

$$U_1 - 6s_1 - 3\mu_2 + \lambda_1 = 10 \tag{4.9}$$

となる。これをシンプレックス表に入れると次のようになる。

	s_1	s_2	λ_1	μ_2	b
x_1	-2	1	0	0	2
λ_2	-1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
μ_1	-5	3	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	7
x_2	1	-1	0	0	2
z	2	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	-5
U_1	-6	0	1	-3	10

後は同様に解いて行く。

	s_1	s_2	λ_2	μ_2	b
x_1	-2	1	0	0	2
λ_1	2	-2	2	1	2
μ_1	-6	4	-1	-1	6
x_2	1	-1	0	0	2
z	1	1	-1	-2	-6
U_1	$-\frac{13}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{2}$	$\frac{19}{2}$

	s_1	μ_1	λ_2	μ_2	b
x_1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
λ_1	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	5
s_2	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{7}{2}$
x_2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{7}{2}$
z	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{7}{4}$	$-\frac{15}{2}$
U_1	$-\frac{23}{4}$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{3}{8}$	$-\frac{27}{8}$	$\frac{35}{4}$

これは条件 (i) を満たすのでここで停止する。つまり相補性条件を満たす解が得られたことになる。これより $x_1 = \frac{1}{2}$，$x_2 = \frac{7}{2}$ のとき最大値 $z = -\frac{15}{2}$ をとるとなる。

5. Dantzig の方法

Dantig の方法は Wolfe の方法を改良したもので，目的関数の勾配が大きくなる方向に進むことにより効率を改善したものとなっている。また通常のシンプレックス法に相対シンプレックス法を混在させたものであるという特徴を持つ。

２次計画問題 QP_1 を考える。このとき Kuhn–Tucker 条件は 50頁の条件 (a)–(d) である。そして λ は(3.1)のように分解し，条件 (a) は(3.3)のように人為変数を入れる。ただし条件 (b) は(3.4)のように人為変数を入れるのでなく

$$\mu - Qx - A'\lambda^+ + A'\lambda^- = -c \tag{5.1}$$

と表す。そしてこれをシンプレックス表にすると次のようになる。

	x	λ^+	λ^-	b
v	A	O	O	b
μ	$-Q$	$-A'$	A'	$-c$
z	$-\frac{1}{2}c'$	$-\frac{1}{2}b'$	$\frac{1}{2}b'$	0
V	$1'A$	$0'$	$0'$	$1'b$

Dantzig の方法ではまず目的関数 V を最小にするという線形計画問題をシンプレックス法で解いて，$Ax = b$ となる許容解を求めてから，μ に関しては相対シンプレックス法の方法を適用して解を求めるという手順を踏む。

つまり $-c$ の成分で符号が負数であるものの中から絶対値が最大のものを選んで，そのときの μ の成分を基

底変数から追い出す変数の候補とする。例えば μ_s が基底変数から追い出す変数の候補であったときは μ_s に対応する主変数 x_s が基底変数に入る候補となる。実際に基底変数から追い出す変数は $b \div x_s$ をすべての列で計算して，それが正で最小のものが選ばれることになる。このとき μ_s が実際に基底変数から追い出す変数に選ばれれば，μ_s と x_s で基底交換が行われるので，相補性条件が保たれたシンプレックス表が得られることになる。もし μ_s とは異なる変数が基底変数から追い出される変数に選ばれれば，その変数と x_s の間で基底交換が行われるので，相補性条件が保たれないシンプレックス表が得られることになる。前者の相補性条件が保たれたシンプレックス表を標準型といい，後者の相補性条件が保たれないシンプレックス表を非標準型と呼ぶ。

シンプレックス表が標準型であるときはそのまま継続して次のサイクルに移行すればよい。非標準型の場合は x_s と μ_s が共に基底変数に入っている訳であるが，この場合は元から基底変数に入っていた方を基底変数から追い出す変数の候補とする。そして主変数と双対変数が共に非基底変数となった変数（これを例えば x_i と μ_i とする）のいずれか基底変換ができる方を基底変数に入れる変数とすればよい。どちらが基底変数にできる変数になるかはピボットとなる項で判断される。もし x_i が基底変数に入る変数であれば，先程と同様に $b \div x_i$ をすべての列で計算して，実際に基底変数から追い出す変数を決める。

これで標準型に戻れば次のサイクルに移行すればよいし，非標準型のままのときは上に述べたことと同じ操作を繰り返せばよい。

これを例題 3.2 の解法に用いると次のようになる。制約条件にスラック変数を入れるところまでは同じである。そして条件 (b) は(5.1)のように表すと次が得られる。

$$
\begin{aligned}
x_1 + 4x_2 + s_1 &= 4 \\
x_1 + x_2 + s_2 &= 2 \\
-2x_1 - \lambda_1 - \lambda_2 + \mu_1 &= -2 \\
-2x_2 - 4\lambda_1 - \lambda_2 + \mu_2 &= -3
\end{aligned}
$$

この例題の場合は許容解は既に得られているので，目的関数 V は不要である。そしてこれをシンプレックス表にすると次のようになる。

	x_1	x_2	λ_1	λ_2	b
s_1	1	4	0	0	4
s_2	1	1	0	0	2
μ_1	-2	0	-1	-1	-2
μ_2	0	-2	-4	-1	-3
z	-1	$-\frac{3}{2}$	-2	-1	0

相補性条件は $x_1\mu_1 = 0,\ x_2\mu_2 = 0,\ \lambda_1 s_1 = 0,\ \lambda_2 s_2 = 0$ である。

まず μ_2 が基底変数から追い出す変数の候補となる。基底変数に入れる変数は μ_2 に対する主変数 x_2 である。ここで $b \div x_2$ を計算すると正で最小になるのは s_1 となるので，s_1 が実際に基底変数から追い出す変数になる。それで s_1 と x_2 で基底交換を行う。

	x_1	s_1	λ_1	λ_2	b
x_2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	1
s_2	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	0	1
μ_1	-2	0	-1	-1	-2
μ_2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-4	-1	-1
z	$-\frac{5}{8}$	$\frac{3}{8}$	-2	-1	$\frac{3}{2}$

これは x_2 と μ_2 が共に基底変数に入っており $x_2\mu_2 = -1 \neq 0$ となって相補性条件を満たさないので非標準型である。それで元から基底変数に入っていた μ_2 を基底変数から追い出す変数の候補とする。基底変数に入れる変数は主変数と双対変数が共に非基底変数となった s_1 と λ_1 のいずれかである。このうち基底交換ができるのは μ_2 の b の値 -1 とピボットが同じ符号になる λ_1 であるので，λ_1 が基底変数に入る変数となる。$b \div \lambda_1$ を計算すると正で最小になるのは μ_2 であるので，μ_2 と λ_1 で基底交換を行う。

	x_1	s_1	μ_2	λ_2	b
x_2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	1
s_2	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	0	1
μ_1	$-\frac{17}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{7}{4}$
λ_1	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
z	$-\frac{7}{8}$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	2

μ_1 を基底変数から追い出す変数の候補とする。基底変数に入れる変数は μ_1 に対する主変数 x_1 である。ここで $b \div x_1$ を計算すると μ_1 が実際に基底変数から追い出す変数となるので，x_1 と μ_1 で基底交換を行う。

	μ_1	s_1	μ_2	λ_2	b
x_2	$\frac{2}{17}$	$\frac{4}{17}$	$-\frac{1}{34}$	$-\frac{3}{34}$	$\frac{27}{34}$
s_2	$\frac{6}{17}$	$-\frac{5}{17}$	$-\frac{3}{34}$	$-\frac{9}{34}$	$\frac{13}{34}$
x_1	$-\frac{8}{17}$	$\frac{1}{17}$	$\frac{2}{17}$	$\frac{6}{17}$	$\frac{14}{17}$
λ_1	$-\frac{1}{17}$	$-\frac{2}{17}$	$-\frac{4}{17}$	$\frac{5}{17}$	$\frac{6}{17}$
z	$-\frac{7}{17}$	$\frac{3}{17}$	$-\frac{27}{68}$	$-\frac{13}{68}$	$\frac{185}{68}$

これは相補性条件を満たすシンプレックス表である。これより $x_1 = \frac{14}{17}$，$x_2 = \frac{27}{34}$ のとき最大値 $z = \frac{185}{68}$ をとるとなる。

次に例題 3.3 の解法に用いる。制約条件にサープラス変数を入れるところまでは同じである。Dantzig の方法では制約条件にのみ人為変数を入れて次のようにする。

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - s_1 + v_1 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 - s_2 + v_2 &= 6 \\ -2x_1 + \lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 &= 4 \\ -2x_2 + \lambda_1 + 2\lambda_2 + \mu_2 &= -2 \\ V &= v_1 + v_2 \text{ を最小にする。} \end{aligned}$$

目的関数から人為変数を消去すると

$$V + 2x_1 + 3x_2 - s_1 - s_2 = 10$$

となるので，次のシンプレックス表を作ることができる。

	x_1	x_2	s_1	s_2	λ_1	λ_2	b
v_1	1	-1	-1	0	0	0	4
v_2	1	2	0	-1	0	0	6
μ_1	-2	0	0	0	1	1	4
μ_2	0	-2	0	0	1	2	-2
z	2	-1	0	0	2	3	0
V	2	3	-1	-1	0	0	10

ここで相補性条件は $x_1\mu_1 = 0,\ x_2\mu_2 = 0,\ \lambda_1 s_1 = 0,\ \lambda_2 s_2 = 0$ である。

これでまず目的関数 V を最小にするという線形計画問題を解く。

	x_1	μ_2	s_1	s_2	λ_1	λ_2	b
v_1	1	$\frac{1}{2}$	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	3
v_2	1	1	0	-1	1	2	4
μ_1	-2	0	0	0	1	1	4
x_2	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	-1	1
z	2	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{3}{2}$	2	1
V	2	$\frac{3}{2}$	-1	-1	$\frac{3}{2}$	3	7

	x_1	μ_2	s_1	s_2	λ_1	b
v_1	$\frac{1}{2}$	0	-1	$\frac{1}{2}$	0	1
λ_2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2
μ_1	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2
x_2	$\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	3
z	1	$-\frac{3}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	-3
V	$\frac{1}{2}$	0	-1	$\frac{1}{2}$	0	1

	μ_2	s_1	s_2	λ_1	b
x_1	0	-2	1	0	2
λ_2	$\frac{1}{2}$	1	-1	$\frac{1}{2}$	1
μ_1	$-\frac{1}{2}$	-5	3	$\frac{1}{2}$	7
x_2	0	1	-1	0	2
z	$-\frac{3}{2}$	2	0	$\frac{1}{2}$	-5
V	0	0	0	0	0

この前までのシンプレックス表は標準型であったが，ここで x_1，μ_1 の両方が基底変数になっているので相補

性条件を満たさず非標準型になる。これは x_1 が基底変数に入ることで非標準型になったので，元から基底変数に入っている μ_1 を基底変数から追い出す変数の候補とする。主変数と双対変数が共に非基底変数となったのは s_1 と λ_1 であるが，このうち基底交換ができるのは，μ_1 の b の値 7 とピボットが同じ符号になる λ_1 である。従って λ_1 が基底変数に入る変数となる。

ただ $b \div \lambda_1$ を計算すると実際に基底変数から追い出される変数は λ_2 となる。それで λ_1 と λ_2 で基底交換する。

	μ_2	s_1	s_2	λ_2	b
x_1	0	-2	1	0	2
λ_1	1	2	-2	2	2
μ_1	-1	-6	4	-1	6
x_2	0	1	-1	0	2
z	-2	1	1	-1	-6

これはまた非標準型になる。μ_1 が基底変数から追い出す変数の候補で，主変数と双対変数が共に非基底変数となったのは s_2 と λ_2 であるが，このうち基底交換ができるのは s_2 である。$b \div s_2$ を計算すると実際に基底変数から追い出される変数は μ_1 となるので，μ_1 と s_2 で基底交換する。

	μ_2	s_1	μ_1	λ_2	b
x_1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
λ_1	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	5
s_2	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$
x_2	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{7}{2}$
z	$-\frac{7}{4}$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{15}{2}$

これで相補性条件を満たすシンプレックス表ができたので，これより $x_1 = \frac{1}{2}$，$x_2 = \frac{7}{2}$ のとき最大値 $z = -\frac{15}{2}$ をとるとなる。

なお非標準型になったとき非基底変数の主変数と双対変数のどちらを基底変数に入れる変数に選ぶかはあくまでピボットとなる項に依存する。例えば例題 3.3 を次のように変えた 2 次計画問題を考える。

例題 5.1　次の 2 次計画問題を解け。

制約条件

$x_1 + x_2 \geqq 4$

$x_1 + 2x_2 \geqq 6$

$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0$

目的関数

$z = 4x_1 + 2x_2 - x_1^2 - x_2^2$ を最大にする。

この場合はシンプレックス表は次のようになる。

	x_1	x_2	s_1	s_2	λ_1	λ_2	b
v_1	1	1	-1	0	0	0	4
v_2	1	2	0	-1	0	0	6
μ_1	-2	0	0	0	1	1	-4
μ_2	0	-2	0	0	1	2	-2
z	-2	-1	0	0	2	3	0
V	2	3	-1	-1	0	0	10

これを先程と同じように変形して行くと，次のシンプレックス表が得られる。

	μ_2	s_1	s_2	λ_1	b
x_1	0	-2	1	0	2
λ_2	$\frac{1}{2}$	1	-1	$\frac{1}{2}$	1
μ_1	$-\frac{1}{2}$	-5	3	$\frac{1}{2}$	-1
x_2	0	1	-1	0	2
z	$-\frac{3}{2}$	-6	4	$\frac{1}{2}$	3
V	0	0	0	0	0

これは非標準型で元から基底変数に入っている μ_1 が基底変数から追い出す変数の候補となる。また主変数と双対変数が共に非基底変数となったのは s_1 と λ_1 であるが，このうち基底交換ができるのは，μ_1 の b の値 -1 とピボットが同じ符号になる s_1 であるので，s_1 が基底変数に入る変数となる。

	μ_2	μ_1	s_2	λ_1	b
x_1	$\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{12}{5}$
λ_2	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$
s_1	$\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$
x_2	$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{9}{5}$
z	$-\frac{9}{10}$	$-\frac{6}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{10}$	$\frac{21}{5}$

これは相補性条件を満たすので，これより $x_1 = \frac{12}{5}$，$x_2 = \frac{9}{5}$ のとき最大値 $z = \frac{21}{5}$ をとるとなる。

6. van de Panne–Whinston の双対法

van de Panne–Whinston の双対法 ([18]) は２次計画問題 QP_1 を解く代わりに双対問題 DQP_1 を解くことにより解を得るものである。Dantzig の方法で行ったのと同様にして次のシンプレックス表を作成する。ただし今回は目的関数を含めない。

	x	λ^+	λ^-	b
v	A	O	O	b
μ	$-Q$	$-A'$	A'	$-c$
z	$-\frac{1}{2}c'$	$-\frac{1}{2}b'$	$\frac{1}{2}b'$	0

ここで $v \in \mathbb{R}^m_+$ と λ^+，$\lambda^- \in \mathbb{R}^m_+$ は相補性条件を満たす関係ではないのであるが，簡便上その第 i 成分を v_i，λ_i^+，λ_i^- としたときに v_i を主変数といい，λ_i^+，λ_i^- を v_i に対する双対変数ということにする。

後は Dantzig の方法と同じで，$-c$ の成分で符号が負であるものの中から絶対値が最大のものを選んで，そのときの μ の成分を基底変数から追い出す変数の候補とする。例えば μ_s が基底変数から追い出す変数の候補であったときは μ_s に対応する主変数 x_s が基底変数に入る候補となる。実際に基底変数から追い出す変数は $b \div x_s$ をすべての列で計算して，それが正で最小のものが選ばれることになる。このとき μ_s が実際に基底変数から追い出す変数に選ばれれば，μ_s と x_s で基底交換が行われるので，相補性条件が保たれたシンプレックス表が得られることになる。もし μ_s とは異なる変数が基底変数から追い出される変数に選ばれれば，その変数と x_s の間で基底交換が行われるので，相補性条件が保たれないシンプレックス表が得られることになる。前者の相補性条件が保たれたシンプレックス表を標準型といい，後者の相補性条件が保たれないシンプレックス表を非標準型と呼ぶことは同じである。

Dantzig の方法と異なるのは，人為変数が基底変数から追い出される変数として選ばれた場合である。例えば v_i が基底変数から追い出される変数に選ばれたとする。このときはシンプレックス表は非標準型になるのであるが，人為変数 v_i は非基底変数になったときにシンプレックス表から外されることになる。それで v_i に対する双対変数 λ_i^+ と λ_i^- のいずれかを基底変数に入る変数とする。どちらが基底変数に入るかはピボットとなる項で判断される。

これにより双対問題の制約条件 $Qx + A'\lambda - c \in \mathbb{R}_+^n$ を満たす許容解を求めてから，基底変数に残っている人為変数を基底変数から追い出すことにより双対問題 DQP_1 の解を求める。これは基底変数に残っている人為変数が v_s であったとして，v_s に対する双対変数 λ_s^+ と λ_s^- のいずれかを基底変数に入れる変数として基底交換を行えばよい。具体的な方法は μ_s のときに述べた方法と同じである。

これを例題 3.1 を用いて行うと次のようになる。まずシンプレックス表は次の通りとなる。

	x_1	x_2	λ^+	λ^-	b
v	1	2	0	0	1
μ_1	-4	-1	-1	1	-3
μ_2	-1	-2	-2	2	-4
z	$-\frac{3}{2}$	-2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

これにより μ_2 が基底変数から追い出す変数の候補となり，μ_2 に対する主変数 x_2 が基底変数に入れる変数となる。ただ実際に $b \div x_2$ を計算すると基底変数から追い出す変数は v となるので，v と x_2 で基底交換をする。

	x_1	λ^+	λ^-	b
x_2	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$
μ_1	$-\frac{7}{2}$	-1	1	$-\frac{5}{2}$
μ_2	0	-2	2	-3
z	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

これは非標準型であるが，人為変数 v が基底変数から追い出されることで非標準型になったので，v に対する双対変数 λ^+, λ^- のいずれかが基底変数に入る変数となる。μ_2 が基底変数から追い出す変数の候補であるからピボットとなる項を持つのは λ^+ であるから λ^+ が基底変数に入る変数となり，$b \div \lambda^+$ を計算することで，μ_2 が実際に基底変数から追い出される変数となる。μ_2 と λ^+ で基底交換をする。

	x_1	μ_2	λ^-	b
x_2	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$
μ_1	$-\frac{7}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	-1
λ^+	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$\frac{3}{2}$
z	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{7}{4}$

μ_1 が基底変数から追い出す変数の候補で，μ_1 に対する主変数 x_1 を基底変数に入れる。$b \div x_1$ を計算することで実際に基底変数から追い出される変数は μ_1 になるので，μ_1 と x_1 で基底交換を行う。

	μ_1	μ_2	λ^-	b
x_2	$\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{14}$	0	$\frac{5}{14}$
x_1	$-\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	0	$\frac{2}{7}$
λ^+	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$\frac{3}{2}$
z	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{5}{28}$	0	$\frac{53}{28}$

これで相補性条件を満たす解が得られたことになる。従って $x_1 = \frac{2}{7}$，$x_2 = \frac{5}{14}$ のとき最大値 $z = \frac{53}{28}$ をとるとなる。

次に例題 3.2 は Dantzig の方法と同じになるので例題 3.3 で行う。ただ例題 3.3 のタイプの 2 次計画問題では 55頁の最後のシンプレックス表を使うことになるが，このシンプレックス表には人為変数に対応する双対変数が含まれていないので扱い難い。それでこのまま使うのでなく v と s で基底交換をして次の形に直す。

	x	μ	λ	b
s	$-A$	O	O	$-b$
w	DQ	$-D$	DA'	$\lvert c\rvert$
z	$-\frac{1}{2}c'$	$0'$	$\frac{1}{2}b'$	0
W	$d'Q$	$-d'$	$d'A'$	$1'\lvert c\rvert$
V	$0'$	$0'$	$0'$	0

そしてこれを 71頁のシンプレックス表のように μ を基底変数とし，目的関数を外すと次のようなシンプレックス表が得られる。

	x	λ	b
s	$-A$	O	$-b$
μ	$-Q$	$-A'$	$-c$
z	$-\frac{1}{2}c'$	$\frac{1}{2}b'$	0

このシンプレックス表を用いて μ について双対シンプレックス法を適用して双対問題の制約条件を満たす許容解を求めてから，$-b$ の成分の中に負数となるものが残れば s と対応する双対変数 λ の間で基底交換をして解を求めるという手順を踏めばよい。

これを実際に行うと次のようになる。Kuhn–Tucker 条件は例題 3.3 の解答で求めたように

$$
\begin{aligned}
-x_1 - x_2 + s_1 &= -4 \\
-x_1 - x_2 + s_2 &= -6 \\
-2x_1 + \lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 &= 4 \\
-2x_2 + \lambda_1 + 2\lambda_2 + \mu_2 &= -2
\end{aligned}
$$

と表すことができる。また相補性条件が成り立つところでは目的関数は

$$z = -2x_1 + x_2 - 2\lambda_1 - 3\lambda_2$$

となる。従って次のシンプレックス表が得られる。

	x_1	x_2	λ_1	λ_2	b
s_1	-1	-1	0	0	-4
s_2	-1	-2	0	0	-6
μ_1	-2	0	1	1	4
μ_2	0	-2	1	2	-2
z	2	-1	2	3	0

双対問題の許容解を得るために，まず μ_2 を基底変数から追い出す変数の候補とする。μ_2 に対する主変数 x_2 が基底変数に入る変数となるので $b \div \mu_2$ を計算すると，実際に μ_2 と x_2 で基底交換が行われる。

	x_1	μ_2	λ_1	λ_2	b
s_1	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-3
s_2	-1	-1	-1	-2	-4
μ_1	-2	0	1	1	4
x_2	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	1
z	2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	2	1

次に s_2 を基底変数から追い出す変数の候補とすると，s_2 に対する双対変数 λ_2 が基底に入る変数で，実際に s_2 と λ_2 で基底交換が行われる。

	x_1	μ_2	λ_1	s_2	b
s_1	$-\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	-1
λ_2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	2
μ_1	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2
x_2	$\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	3
z	1	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	-3

同様に s_1 と μ_1 で基底交換を行う。

	s_1	μ_2	λ_1	s_2	b
x_1	-2	0	0	1	2
λ_2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	1
μ_1	-5	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	3	7
x_2	1	0	0	-1	2
z	2	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-5

これは x_1 と μ_1 が共に基底変数に入っているので非標準型である。基底変数から追い出す変数の候補は μ_1 で，ピボット項の関係から主変数と双対変数が共に非基底変数に入っている s_1 と λ_1 の内で λ_1 が基底変数に入る変数となる。ただ $b \div \lambda_1$ を計算すると，実際に基底変数から追い出される変数は λ_2 となるので，λ_1 と λ_2 で基底交換を行う。

	s_1	μ_2	λ_2	s_2	b
x_1	-2	0	0	1	2
λ_1	2	1	2	-2	2
μ_1	-6	-1	-1	4	6
x_2	1	0	0	-1	2
z	1	-2	-1	1	-6

これも非標準型であるが，同様の理由で共に非基底変数である s_2 と λ_2 の内で s_2 が基底変数に入り，s_2 と μ_1 で基底交換を行う。

	s_1	μ_2	λ_2	μ_1	b
x_1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
λ_1	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	5
s_2	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{2}$
x_2	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{2}$
z	$\frac{5}{2}$	$-\frac{7}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{15}{2}$

これで相補性条件を満たす解が得られたことになる。これより $x_1 = \frac{1}{2}$，$x_2 = \frac{7}{2}$ のとき最大値 $z = -\frac{15}{2}$ をとるとなる。

7. Beale の逆行列法

Beale の逆行列法 ([1]) は Dantzig のシンプレックス法に最も近い考え方に基づく方法であり，基底許容解を目的関数が大きくなる方向に順次調べていくことで解を得る。ただ線形計画問題では基底許容解のどれかが最適解となるので，基底許容解を順番に調べて行けば解に到達することができるが，非線形計画問題はそのような性質を持っていない。それで次の基底許容解に移る間に目的関数が減少に転じたら，そこで新しい非基底変数を追加して，そこが新しい基底許容解になるようにする。

まず $x \in \mathbb{R}^n$，$c \in \mathbb{R}^n$，$Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ として，２次関数

$$f(x) = c'x - \frac{1}{2}x'Qx \tag{7.1}$$

を考える。ここで

$$x = y_0 + Yy \quad (y_0 \in \mathbb{R}^m,\ y \in \mathbb{R}^m,\ Y \in \mathbb{R}^{n\times m}) \tag{7.2}$$

とおいて，(7.1)に代入すると

$$f(y) = f(y_0) + (c - Qy_0)'Yy - \frac{1}{2}y'(Y'QY)y \tag{7.3}$$

となる。この変形はシンプルであるがこの先の計算によく用いる。

2 次計画問題 QP_1 を考える。$\operatorname{rank} A = m$ であるので，行列 A は

$$A = \begin{pmatrix} B & R \end{pmatrix} \quad (B\text{は } m \text{ 次正則行列},\ R \in \mathbb{R}^{n\times(n-m)})$$

と分解することができる。この分解に合わせて

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_R \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} c_B \\ c_R \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} Q_B & Q_1 \\ Q_1' & Q_R \end{pmatrix}$$

と分解する。$x_B \in \mathbb{R}^m,\ x_R \in \mathbb{R}^{n-m}$ である。$Ax = b$ より

$$\begin{pmatrix} B & R \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_B \\ x_R \end{pmatrix} = b, \quad Bx_B + Rx_R = b$$

となり，B は正則であるので

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Rx_R$$

と書ける。ここで $x_R = 0$ とすると $x_B = B^{-1}b$ となるが，$x_B > 0$ であれば x は基底許容解を与えている。x_B が基底変数で，x_R が非基底変数である。

$y_0 = B^{-1}b,\ Y = B^{-1}R$ とおくと

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -Y \\ I \end{pmatrix} x_R$$

となるので，(4.8)に代入すると(7.3)より

$$f(x_R) = f_0 + \alpha' x_R - \frac{1}{2}x_R' G x_R \tag{7.4}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} f_0 &= f\left(\begin{pmatrix} y_0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\ \alpha &= \begin{pmatrix} -Y' & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_B & c_B \\ Q_1' & c_R \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -y_0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ G &= \begin{pmatrix} -Y' & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_B & Q_1 \\ Q_1' & Q_R \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -Y \\ I \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である。(7.4)により 2 次関数 f は非基底変数 x_R を用いて表されることになるが，これの x_R による微分 $\boldsymbol{\nabla}_R f$ は

$$\boldsymbol{\nabla}_R f(x_R) = \begin{pmatrix} -Y' & I \end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix} Q_B & c_B \\ Q_1' & c_R \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -y_0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Q_B & Q_1 \\ Q_1' & Q_R \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -Y \\ I \end{pmatrix} x_R\right\} \tag{7.5}$$

と表すことができる。簡単のため $\boldsymbol{\nabla}_R f(x_R)$ を ∂_R と表すことにする。そして x が基底許容解であるときに，これらを次のようにシンプレックス表にする。

	x_R	b
x_B	Y	y_0
∂_R	G	α

$x_B \in \mathbb{R}_+^m$, $x_R \in \mathbb{R}_+^{n-m}$, $\partial_R \in \mathbb{R}^{n-m}$ の第 i 成分をそれぞれ x_{Bi}, x_{Ri}, ∂_{Ri} と書くことにする。ここで

$$\partial_{Ri} = \frac{\partial f(x_R)}{\partial x_{Ri}}$$

であり，∂_{Ri} を x_{Ri} に対する微分係数という。

Beale の逆行列法は次の手順に基づいて行われる。まず $\alpha \leqq 0$ のときは，目的関数 $f(x_R)$ の $x_R = 0$ における微分係数がすべて 0 以下であるので，非基底変数 x_R のどれかを 0 から僅かに増加させると目的関数は減少する。つまりこの基底許容解が最大値を与えるものになっている。

次にある i で $\alpha_i > 0$ であったとする。このときは x_{Ri} を 0 から僅かに増加させると目的関数 $f(x_R)$ も増加するので，この基底許容解は最大値を与えてはいない。そのため x_{Ri} は基底変数に入ることになる。一方で基底変数から追い出される変数は x_B と x_{Ri} に対する微分係数 ∂_{Ri} で $b \div x_{Ri}$ を計算して，正で最小のものが選ばれることになる。これがもし x_B の中から選ばれた場合は，それを x_{Bs} として，x_{Ri} と x_{Bs} で基底交換を行う。またもし ∂_{Ri} が選ばれた場合は，新たな基底許容解に移る前に目的関数が減少に転じることになるので，x_{Ri} と ∂_{Ri} で基底交換をしてから ∂_{Ri} を適当な変数名に置き換えて，新しい非基底変数として加える。例えば u_i という名前にした場合は $u_i \in \mathbb{R}$ であるので，さらに $u_i = u_i^+ - u_i^-$ $(u_i^+ \geqq 0,\ u_i^- \geqq 0)$ と分解する。

こうしてできた新しい非基底変数に基づいて上のようなシンプレックス表を作ることになるが，いずれの場合も新しい非基底変数に対する微分係数はシンプレックス表の変形だけでは作ることができないので(7.5)を用いて計算することになる。

これを例題 5.1 を用いて行うと次のようになる。まずは基底許容解を作る必要があるので，制約条件にサープラス変数と人為変数を入れて

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - s_1 + v_1 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 - s_2 + v_2 &= 6 \end{aligned}$$

とする。そして目的関数 $V = v_1 + v_2$ を最小にするという線形計画問題を解く。これをシンプレックス表にすると次のようになる。

	x_1	x_2	s_1	s_2	b
v_1	1	1	-1	0	4
v_2	1	2	0	-1	6
∂_{x_1}	2	0	0	0	4
∂_{x_2}	0	2	0	0	2
∂_{s_1}	0	0	0	0	0
∂_{s_2}	0	0	0	0	0
V	2	3	-1	-1	10

ここで目的関数は非基底変数が x_1, x_2, s_1, s_2 であるとして，その微分係数を計算したものを用いている。これは次のように変形して行くことができる。なお新しい非基底変数が決まるまでは対応する微分係数の名称は空欄にしておく。

	x_1	s_1	s_2	b
v_1	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	1
x_2	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	3
	2	0	0	4
	0	2	0	-4
	0	0	0	0
	0	0	0	0
V	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	1

	s_1	s_2	b
x_1	-2	1	2
x_2	1	-1	2
	4	-2	0
	-2	2	-2
	0	0	0
	0	0	0
V	0	0	0

これで基底許容解が得られたので，目的関数 V は不要でシンプレックス表から除く。このシンプレックス表から基底変数は x_1，x_2 で，非基底変数は s_1，s_2 であり，さらに

$$y_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

となる。ここで非基底変数に対する微分係数を得るために(7.5)を用いる。具体的には上で得られたシンプレックス表の点線より下の部分に

$$\begin{pmatrix} -Y' & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を掛ければよい。すると次のシンプレックス表が得られる。

	s_1	s_2	b
x_1	-2	1	2
x_2	1	-1	2
∂_{s_1}	10	-6	2
∂_{s_2}	-6	4	-2

ここで

$$\alpha = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$$

とおく。これは ∂_{s_1} の b の値が 2 で正であるので目的関数を最大にする基底許容解になっていない。それで $b \div \partial_{s_1}$ を計算すると，正で最小になるのは ∂_{s_1} である。つまり $s_1 = \frac{1}{5}$ で目的関数が減少に転じるということである。それで s_1 と ∂_{s_1} で基底交換をする。ここで ∂_{s_1} は u_1 という変数名にして非基底変数に入れると次のようになる。

	u_1	s_2	b
x_1	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{12}{5}$
x_2	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{9}{5}$
s_1	$\frac{1}{10}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$
∂_{s_2}	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{4}{5}$

これより

$$s_1 + \frac{1}{10}u_1 - \frac{3}{5}s_2 = \frac{1}{5}$$

である。さらに $u_1 = u_1^+ - u_1^-$ と分解すると

$$s_1 + \frac{1}{10}u_1^+ - \frac{1}{10}u_1^- - \frac{3}{5}s_2 = \frac{1}{5} \tag{7.6}$$

となり，シンプレックス表は次のようになる。

	u_1^+	u_1^-	s_2	b
x_1	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{12}{5}$
x_2	$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{9}{5}$
	$\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$
	$\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{4}{5}$

また前の非基底変数 s_1，s_2 と新しい非基底変数 u_1^+，u_1^-，s_2 の間には(7.6)より

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^+ \\ u_1^- \\ s_2 \end{pmatrix}$$

という関係ができるので，ここで新たに

$$y_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおいて(7.3)を用いる。

$$\alpha - Gy_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix} \tag{7.7}$$

$$GY = \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ \frac{3}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \tag{7.8}$$

であるので，先のシンプレクス表の点線の下を置き換えると次のようになる。

	u_1^+	u_1^-	s_2	b
x_1	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{12}{5}$
x_2	$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{9}{5}$
	-1	1	0	0
	$\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{4}{5}$

そして点線より下に Y' 掛けると，次のシンプレックス表が得られる。

	u_1^+	u_1^-	s_2	b
x_1	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{12}{5}$
x_2	$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{9}{5}$
$\partial_{u_1^+}$	$\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{10}$	0	0
$\partial_{u_1^-}$	$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	0	0
∂_{s_2}	0	0	$\frac{2}{5}$	$-\frac{4}{5}$

これは微分係数 $\partial_{u_1^+}$，$\partial_{u_1^-}$，∂_{s_2} がすべて 0 以下であるので最大値を与える基底許容解である。また最大値は目的関数に $x_1 = \frac{12}{5}$，$x_2 = \frac{9}{5}$ を代入すれば $z = \frac{21}{5}$ となる。

8. Theil–van de Panne の有効制約法

制約条件の中で等式で満たしているものを有効制約という。Theil–van de Panne の有効制約法は 2 次計画問題の解が満たしている有効制約を決定することで解を得る方法である。有効制約法は制約条件の数が少ないときは内点法より効率的に解を得ることができるので，2 次計画問題を解く代表的な方法として取り上げている書籍も見受けられる。

この方法では制約条件の不等式を 1 つにまとめた 2 次計画問題 QP_2 で考える。なお Q が半正定値のときは扱いが複雑になるので，以下では正定値であると仮定して話を進める。半正定値である場合の解説は [16, 17] が詳しい。この場合の Kuhn–Tucker 条件は 50頁の (a)–(d) である。Q は正定値であるので (c) より

$$x = Q^{-1}(c - A'\lambda) \quad (= x(\lambda) \text{ と書く。}) \tag{8.1}$$

と書けるので (b) に代入すると

$$s = AQA'\lambda + b - AQ^{-1}c \quad (= s(\lambda) \text{ と書く。}) \tag{8.2}$$

となる。これより s の第 i 成分を s_i とすると $s_i = 0$ のとき対応する制約式は有効制約である。また $s_i > 0$ のときは $x(\lambda)$ は対応する制約式を満たしており，$s_i < 0$ のときは $x(\lambda)$ は対応する制約式を満たしていない。また $\lambda = 0$ のときは $x(0) = Q^{-1}c$ であるが，これは制約条件を考慮しない目的関数 z の大域的最適解である。有効制約の集合を S としたときに，S のもとで目的関数 z を最大にする解を x^S と書くことにする。そして x^S が満たしていない制約式の集合を $V(x^S)$ とする。$S = \emptyset$ のときは $x^\emptyset = x(0)$ である。

Theil–van de Panne の有効制約法は $S = \emptyset$ から始めて $V(x^\emptyset)$ の制約式を順次追加して制約条件を満たす解 x^S を得るという手順を踏む。このとき以下の定理が有用である。ここで 2 次計画問題 QP_2 の制約条件を満たす解，つまり局所最適解を x^*，その有効制約を S^* とする。

定理　$V(x^\emptyset) \neq \emptyset$ のとき，x^* は $V(x^\emptyset)$ の要素のいくつかを有効制約として満たす。

定理　任意の $S \subset S^*$，$S \neq S^*$ に対して，x^S は $S^* \setminus S$ の少なくとも 1 つの制約式を満たしていない。

定理　任意の $h \in S$ に対して，$x^{S\setminus\{h\}}$ が制約式 h を満たしていないとき $S = S^*$ となる。

もし $V(x^\emptyset) = \emptyset$ であれば，大域的最適解 $x(0)$ が 2 次計画問題 QP_2 の局所最適解である。$V(x^\emptyset) \neq \emptyset$ のときは $V(x^\emptyset)$ から要素を 1 つ取ったものを S として x^S を作る。もし $V(x^S) = \emptyset$ であれば x^S が局所最適解 x^* の候補になるが，これが局所最適解であるかどうかは上の定理で判断できる。また $V(x^S) \neq \emptyset$ のときは $V(x^\emptyset)$ から別の要素を 1 つ取って同じことを行う。そしてこれをすべての $V(x^\emptyset)$ の要素で行っても局所最適解が得

られなければ，次は要素1つで作った x^S に $V(x^S)$ から新しく要素を1つ取って S に追加して要素を2つ持つ集合 S を作る。そして x^S について同じ操作を行い x^S が局所最適解になるかどうかを判定する。これを局所最適解が得られるまで，すべての制約条件に付いて繰り返せばよい。

これを例題 5.1 を用いて行うと次のようになる。2次計画問題 QP_2 の形にするために制約条件を

$$-x_1 - x_2 \leqq -4 \tag{8.3}$$
$$-x_1 - 2x_2 \leqq -6 \tag{8.4}$$
$$-x_1 \leqq 0 \tag{8.5}$$
$$-x_2 \leqq 0 \tag{8.6}$$

と表す。

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となるので，(8.1),(8.2)により

$$x(\lambda) = \begin{pmatrix} 2 + \frac{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}{2} \\ 1 + \frac{\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3}{2} \end{pmatrix} \tag{8.7}$$

$$s(\lambda) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{8.8}$$

となる。

まず $S = \emptyset$ のときは，$\lambda = 0$ と置けばよいので

$$x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる。これより $x(0)$ は制約条件の(8.3)と(8.4)を満たしていないことが分かる。ここで式の番号を使うことにすると $V(x^{\emptyset}) = \{(8.3),\ (8.4)\}$ である。

それで $S = \{x_1 + x_2 = 4\}$ として x^S を求める。これは Lagrange 関数を

$$F(x, \lambda_1) = 4x_1 + 2x_2 - x_1^2 - x_2^2 + \lambda_1(x_1 + x_2 - 4)$$

として解けばよいので

$$x^S = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = 1$$

となる。これより

$$s\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

となり，x^S は制約条件の(8.4)を満たしていない。つまり $V(x^{\emptyset}) = \{(8.4)\}$ である。なお λ_1 さえ求めれば(8.7)から $x^S = x(\lambda)$ として x^S を求められるので x^S を求める必要はないのであるが，この例題の場合は簡単に x^S まで求めることができるので上のように求めた。

次に $S = \{x_1 + 2x_2 = 6\}$ として x^S を求める。これは Lagrange 関数を

$$F(x, \lambda_2) = 4x_1 + 2x_2 - x_1^2 - x_2^2 + \lambda_2(x_1 + 2x_2 - 6)$$

として解けばよいので

$$x^S = \begin{pmatrix} \frac{12}{5} \\ \frac{9}{5} \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \frac{4}{5}$$

となる。これより

$$s\left(\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{5} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ 0 \\ \frac{12}{5} \\ \frac{9}{5} \end{pmatrix}$$

となり，x^S はすべての制約条件を満たす。つまり $V(x^S) = \emptyset$ となって x^S は局所最適解の候補となる。これは S から $\{x_1 + 2x_2 = 6\}$ を除いた $x^{\emptyset}$ を考えると(8.4)を満たさないので，先に述べた定理から局所最適解であることが分かる。

また目的関数の最大値は目的関数に $x_1 = \frac{12}{5}$, $x_2 = \frac{9}{5}$ を代入すれば $z = \frac{21}{5}$ となるので，$x_1 = \frac{12}{5}$, $x_2 = \frac{9}{5}$ のとき最大値 $z = \frac{21}{5}$ となる。

9. Houthakker の容量法

Houthakker の容量法は基底許容解と有効制約の両方を用いるが，もともとは [9] において次の 2 次計画問題の解法に用いられた方法である。

2 次計画問題:QP_4
制約条件
$Ax \leqq b$
$1'x \leqq \beta^*$
$x \in \mathbb{R}^n_+$
目的関数
$z = c'x - \dfrac{1}{2}x'Qx$ を最大にする。

ここで $b \in \mathbb{R}^m_+$, $\beta^* > 0$ であり，Q は正定値対称行列である。2 番目の制約条件を容量制約という。$b \in \mathbb{R}^m_+$ という条件などから適用範囲が狭い方法であるという評価がなされているが，[13] で指摘されているように，Q が正定値であるという条件を除いて他の条件は除去することができる。ここでも例題 5.1 に Houthakker の容量法を適用する。

Houthakker の容量法では β^* を $\beta \geqq 0$ で置き換えて容量制約を有効制約にした次の２次計画問題で考える。

２次計画問題:QP_5
制約条件
$Ax \leqq b$
$1'x = \beta$
$x \in \mathbb{R}^n_+$
目的関数
$z = c'x - \dfrac{1}{2}x'Qx$ を最大にする。

そしてこの２次計画問題の解を $x(\beta)$ としたきに，$\beta = 0$ から始めて順次大きくすることにより２次計画問題 QP_4 の解となるような β の値を求める。なお $\beta = 0$ のときは２次計画問題 QP_5 は $x = 0$ という自明な解をもつ。

Beale の逆行列法で行ったように x_B を基底行列，x_R を非基底行列として $x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_R \end{pmatrix}$ と分解する。そしてこの分解に合わせて

$$Q = \begin{pmatrix} Q_B & Q_1 \\ Q_1' & Q_R \end{pmatrix}, \quad 1 = \begin{pmatrix} 1_B \\ 1_R \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} c_B \\ c_R \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} B & R \end{pmatrix}$$

と分解する。そしてさらに制約条件 $Ax \leqq b$ を有効制約と有効制約ではない部分に分けて

$$A = \begin{pmatrix} B_A & R_A \\ B_I & R_I \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_A \\ b_I \end{pmatrix}$$

と分解する。これより制約条件 $Ax \leqq b$ は

$$B_A x_B + R_A x_R = b_A \tag{9.1}$$
$$B_I x_B + R_I x_R < b_I \tag{9.2}$$

と表すことができる。

２次計画問題 QP_5 の Lagrange 関数は

$$L(x, \lambda, \mu, \xi) = c'x - \frac{1}{2}x'Qx + \lambda'(b - Ax) + \mu'x + \xi(\beta - 1'x)$$

であるので，Kuhn–Tucker 条件は

$$\nabla L(x, \lambda, \mu, \xi) = c - Qx - A'\lambda + \mu - \xi 1 = 0 \tag{9.3}$$
$$\lambda'(b - Ax) = 0 \tag{9.4}$$
$$\mu' x = 0 \tag{9.5}$$
$$1'x = \beta \tag{9.6}$$
$$\lambda \geqq 0,\ \mu \geqq 0,\ \xi \in \mathbb{R}$$

となる。ここで上の分解に合わせて $\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_A \\ \lambda_I \end{pmatrix}$, $\mu = \begin{pmatrix} \mu_B \\ \mu_R \end{pmatrix}$ と分解すると(9.3)は

$$\begin{aligned} \nabla L(x,\lambda,\mu,\xi) = &\begin{pmatrix} c_B \\ c_R \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Q_B & Q_1 \\ Q_1' & Q_R \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_B \\ x_R \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} B_A' & B_I' \\ R_A' & R_I' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_A \\ \lambda_I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_B \\ \mu_R \end{pmatrix} \\ &- \xi\begin{pmatrix} 1_B \\ 1_R \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

と書ける。ここで相補性条件から $\mu_B = 0$, $\lambda_I = 0$ でなくてはならないので

$$\begin{aligned} c_B - Q_B x_B - B_A'\lambda_A - \xi 1_B &= 0 \\ c_R - Q_1' x_B - R_A'\lambda_A + \mu_R - \xi 1_R &= 0 \end{aligned}$$

が得られる。また(9.2)はスラック変数 $s_I \geqq 0$ を入れると $x_R = 0$ より

$$\begin{aligned} B_A x_B &= b_A \\ B_I x_B + s_I &= b_I \end{aligned}$$

となる。また $1'x = \beta$ は $1_B' x_B = \beta$ と書ける。そしてこれらをまとめると

$$Q_B x_B + B_A'\lambda_A + \xi 1_B = c_B \tag{9.7}$$
$$B_A x_B = b_A \tag{9.8}$$
$$1_B' x_B = \beta \tag{9.9}$$
$$\mu_R = Q_1' x_B + R_A'\lambda_A + \xi 1_R - c_R \tag{9.10}$$
$$s_I = b_I - B_I x_B \tag{9.11}$$

が得られる。ここで(9.7)–(9.9)は

$$\begin{pmatrix} Q_B & B_A' & 1_B \\ B_A & 0 & 0 \\ 1_B' & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_B \\ \lambda_A \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_B \\ b_A \\ \beta \end{pmatrix} \tag{9.12}$$

と表すことができるので，左辺の第 1 項の行列を G としたとき，G が正則であるときは両辺に G^{-1} を掛けて

$$\begin{pmatrix} x_B \\ \lambda_A \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_B \\ k_A \\ k_\xi \end{pmatrix}\beta + \begin{pmatrix} \ell_B \\ \ell_A \\ \ell_\xi \end{pmatrix}$$

とすることができる。これをさらに(9.10),(9.11)に代入すると

$$\begin{aligned} \mu_R &= k_R\beta + \ell_R \\ s_I &= k_I\beta + \ell_I \end{aligned}$$

と書くことができる。G が正則でないときは基底変数を増やすか有効制約を減らして正則になるようにする。

これにより x_B, λ_A, ξ, μ_R, s_I はすべて β の 1 次関数として表されることになる。ここでもし k_B の成分の中に負数となるものがあれば，対応する x_B の成分は β を 0 から増加させると減少することになる。それでそのような x_B の成分の中で値が 0 になる β の最小値を β_B とする。これは k_A, k_ξ, k_R, k_I についても同様で，対応する成分が 0 になる β の最小値をそれぞれ β_A, β_ξ, β_R, β_I とする。そして

$$\hat{\beta} = \min\{\beta_B, \beta_A, \beta_\xi, \beta_R, \beta_I, \beta^*\}$$

とおく。

ここで $\hat{\beta} = \beta^*$ であれば容量制約は有効制約で $x(\beta^*)$ が 2 次計画問題 QP_4 の解である。また $\hat{\beta} = \beta_\xi$ のときは $x(\beta_\xi)$ が 2 次計画問題 QP_4 の解である。つまりこの 2 つの場合は解が得られたことになる。また目的関数の値は

$$z = \frac{1}{2}c'_B x_B + \frac{1}{2}b'_A \lambda_A + \frac{1}{2}\hat{\beta}\xi$$

で求めることができる。

次に $\hat{\beta} = \beta_B$ のときは 0 になった x_B の成分を基底変数から外して非基底変数に加える。$\hat{\beta} = \beta_A$ のときは 0 になった λ_A の成分に対応する有効制約から外す。$\hat{\beta} = \beta_R$ のときは 0 になった x_R の成分を非基底変数から外して基底変数に加える。$\hat{\beta} = \beta_I$ のときは 0 になった λ_I の成分に対応する制約条件を有効制約に加える。この残り 4 つの場合は現在の基底変数と有効制約は 2 次計画問題の解を与えるものではないので，作り直して(9.7)–(9.11)の条件を再度求めることになる。

これを例題 5.1 を用いて行うと次のようになる。これは 2 次計画問題 QP_5 の形をしていない。それで [13] に従って次のように書き直す。

制約条件

$- x_1 - x_2 + 5x_3 \leqq 1$

$- x_1 - 2x_2 + 7x_3 \leqq 1$

$x_3 \leqq 1$

$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ x_3 \geqq 0$

目的関数

$z = 4x_1 + 2x_2 + Mx_3 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$ を最大にする。

ここで M は十分に大きい正数である。こうすると目的関数 z を大きくするためには x_3 を大きくした方が有利であり，制約条件から $x_3 = 1$ となる。そして $x_3 = 1$ のときは例題 5.1 の制約条件と同じになるので，結果的に例題 5.1 を解いたのと同じ解が得られる。また目的関数を上記のように変更するのは，目的関数が正定値であるようにするためである。この 2 次計画問題は容量制約を持っていないが，この場合は β^* を十分大きな正数として人為的な制約式であると見なせばよい。ここで容量制約を有効制約にして次の 2 次計画問題を解くことにする。

制約条件

$- x_1 - x_2 + 5x_3 \leqq 1$

$- x_1 - 2x_2 + 7x_3 \leqq 1$

$x_3 \leqq 1$

$x_1 + x_2 + x_3 = \beta$

$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ x_3 \geqq 0$

目的関数

$z = 4x_1 + 2x_2 + Mx_3 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$ を最大にする。

Lagrange 関数は

$$\begin{aligned} L(x, \lambda, \mu, \xi) = {} & 4x_1 + 2x_2 + Mx_3 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + \lambda_1(1 + x_1 + x_2 - 5x_3) \\ & + \lambda_2(1 + x_1 + 2x_2 - 7x_3) + \lambda_3(1 - x_3) \\ & + \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3 + \xi(\beta - x_1 - x_2 - x_3) \end{aligned}$$

である。また制約条件にスラック変数を入れると

$$-x_1 - x_2 + 5x_3 + s_1 = 1 \tag{9.13}$$
$$-x_1 - 2x_2 + 7x_3 + s_2 = 1 \tag{9.14}$$
$$x_3 + s_3 = 1 \tag{9.15}$$

となる。これより Kuhn–Tucker 条件は次のように書くことができる。

$$2x_1 - \lambda_1 - \lambda_2 - \mu_1 + \xi = 4 \tag{9.16}$$
$$2x_2 - \lambda_1 - 2\lambda_2 - \mu_2 + \xi = 2 \tag{9.17}$$
$$2x_3 + 5\lambda_1 + 7\lambda_2 - \mu_3 + \xi = M \tag{9.18}$$
$$\lambda_1 s_1 = 0,\ \lambda_2 s_2 = 0,\ \lambda_3 s_3 = 0$$
$$\mu_1 x_1 = 0,\ \mu_2 x_2 = 0,\ \mu_3 x_3 = 0$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = \beta$$
$$\lambda_1 \geqq 0,\ \lambda_2 \geqq 0,\ \lambda_3 \geqq 0,\ \mu_1 \geqq 0,\ \mu_2 \geqq 0,\ \mu_3 \geqq 0,\ \xi \in \mathbb{R}$$

Houthakker の容量法では，最初は目的関数の 1 次の係数が正で最大であるものを基底変数とする。そして制約条件は容量制約以外はすべて有効制約ではないとする。もし目的関数の 1 次の係数がすべて負数であれば自明な解 $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0$ が 2 次計画問題の解である。今の場合は 1 次の係数が最大なものは x_3 であるから $x_B = \{x_3\}, x_R = \{x_1, x_2\}$ である。従って(9.12)は

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M \\ \beta \end{pmatrix}$$

となる。これを解くと $x_3 = \beta,\ \xi = M - 2\beta$ であり，$\xi = 0$ となるのは $\beta_\xi = \frac{M}{2}$ のときである。次に μ_R を求めると(9.16), (9.17)により

$$\mu_R = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - \lambda_1 - \lambda_2 + \xi - 4 \\ 2x_2 - \lambda_1 - 2\lambda_2 + \xi - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M - 4 - 2\beta \\ M - 2 - 2\beta \end{pmatrix}$$

となるので，$\beta_R = \frac{M-4}{2}$ となる。また同様に s_I を求めると(9.13)–(9.15)により

$$s_I = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + x_1 + x_2 - 5x_3 \\ 1 + x_1 + 2x_2 - 7x_3 \\ 1 - x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 5\beta \\ 1 - 7\beta \\ 1 - \beta \end{pmatrix}$$

であるので，$\beta_I = \frac{1}{7}$ となる。ここで

$$\hat{\beta} = \min\{\beta_\xi, \beta_R, \beta_I\} = \frac{1}{7}$$

となり $\hat{\beta} = \beta_I$ が選ばれるので，(9.14)を有効制約とし λ_2 を(9.12)に加える。すると

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 7 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ \lambda_2 \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M \\ 1 \\ \beta \end{pmatrix}$$

となるが，これは左辺の第1項の行列が正則ではないので，解くことができない。それで目的関数の1次の係数が次に大きい x_1 を基底変数に加える。

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 7 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \\ \lambda_2 \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M \\ 4 \\ 1 \\ \beta \end{pmatrix}$$

これを解くと

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \\ \lambda_2 \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\beta \\ -\frac{1}{8} + \frac{7}{8}\beta \\ \frac{M}{8} - \frac{9}{16} + \frac{3}{16}\beta \\ \frac{M}{8} + \frac{59}{16} - \frac{25}{16}\beta \end{pmatrix}$$

となるので，$\beta_\xi = \frac{2M+59}{25}$ となる。次に μ_R を求めると(9.17)により

$$\mu_R = \begin{pmatrix} \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{M}{8} + \frac{45}{16} - \frac{31}{16}\beta \end{pmatrix}$$

となるが，M は十分大きい正数であるので $\mu_2 < 0$ である。また同様に s_I を求めると(9.13),(9.15)により

$$s_I = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\beta \\ \frac{7}{8} - \frac{1}{8}\beta \end{pmatrix}$$

となるので $\beta_I = 7$ となる。ここで

$$\hat{\beta} = \min\{\beta_\xi, \beta_I\} = 7$$

であるので，(9.15)を有効制約とし λ_3 を(9.12)に加える。すると

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 7 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M \\ 4 \\ 1 \\ 1 \\ \beta \end{pmatrix}$$

となるが，これは左辺の第1項の行列が正則ではないので，解くことができない。それで x_2 を基底変数に加える。

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 7 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 1 \\ 7 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_2 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M \\ 4 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ \beta \end{pmatrix}$$

これを解くと

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_2 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 + 2\beta \\ 7 - \beta \\ 32 - 6\beta \\ M - 278 + 52\beta \\ 52 - 10\beta \end{pmatrix}$$

となるので，$\beta_\xi = \frac{26}{5}$ となる。また $x_B = \{x_1, x_2, x_3\}$ の内で β の係数が負数であるのは x_2 で，これが 0 になるのは $\beta_B = 7$ のときである。同様に $\lambda_A = \{\lambda_2, \lambda_3\}$ の内で β の係数が負数であるのは λ_2 で，これが 0 になるのは $\beta_A = \frac{16}{3}$ のときである。さらに(9.13)により

$$s_I = \left(s_1\right) = \Big(M - 6\beta\Big)$$

となるので，$\beta_I = \frac{M}{6}$ となる。ここで

$$\hat{\beta} = \min\{\beta_B, \beta_A, \beta_\xi, \beta_I\} = \frac{26}{5}$$

であり $\hat{\beta} = \beta_\xi$ が選ばれるので，これが 2 次計画問題の解を与える基底変数と有効制約になる。ここで $\beta = \hat{\beta}$ とすると $x_1 = \frac{12}{5},\ x_2 = \frac{9}{5},\ x_3 = 1$ が得られる。

目的関数の最大値は目的関数に $x_1 = \frac{12}{5},\ x_2 = \frac{9}{5}$ を代入すれば $z = \frac{21}{5}$ となるので，$x_1 = \frac{12}{5},\ x_2 = \frac{9}{5}$ のとき最大値 $z = \frac{21}{5}$ となる。

10. Hildreth の反復法

Hildreth の反復法 ([8]) は線形相補性方程式を解くことで 2 次計画問題の解を得る方法である。これは次節で解説する Lemke の双対法も同じであるが，Hildreth の反復法は連立一次方程式の解法の Gauss–Seidel 反復法に類似した方法を用いる。ここでは制約条件の不等式を 1 つにまとめた 2 次計画問題 QP_2 を考える。Kuhn–Tucker 条件は 50頁の条件 (a)–(d) であるが，これは

$$\begin{pmatrix} Q & -Q & A' \\ -Q & Q & -A' \\ -A & A & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \\ \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ -c \\ -b \end{pmatrix}, \quad \Big((x^+)' \quad (x^-)' \quad \lambda'\Big)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ s \end{pmatrix} = 0 \tag{10.1}$$

とまとめることができる。

一般に $M \in \mathbb{R}^{n\times n},\ q \in \mathbb{R}^n$ を与えたときに $x \in \mathbb{R}^n_+,\ y \in \mathbb{R}^n_+$ に対して

$$Mx - y = q, \quad x'y = 0 \tag{10.2}$$

という方程式を線形相補性方程式という。そして線形相補性方程式を満たす $x \in \mathbb{R}^n_+,\ y \in \mathbb{R}^n_+$ をその解という。線形相補性方程式が解を持つような行列のクラスや解の一意性は線形代数学の問題として研究され，さまざまな行列のクラスが提案されているが，これらについては [4] にまとめられている。また線形相補性方程式及びその拡張は数理計画問題のみならずゲーム理論などにも用いられることから，現在においても活発に研究されている。

Hildreth は M が正定値対称行列である場合に線形相補性方程式が一意の解を持つことを証明しているが，(10.1)の左辺の第 1 項の行列は明らかに正定値でも対称行列でもない。それで Theil–van de Panne の有効制約法で行ったように Q は正定値であると仮定して話を進める。このときは(8.1),(8.2)のように表すことができるので $M = AQA',\ q = AQ^{-1}c - b$ とおくと

$$M\lambda - s = q, \quad \lambda' s = 0 \tag{10.3}$$

となり，線形相補性方程式が得られる。ただし Q が正定値であったとしても M は半正定値にはなるが正定値になるとは限らない。そのため Hildreth の反復法は適用範囲が狭いという評価をしている論文も見受

けられる。ただ少なくとも M の対角成分が正数であれば Hildreth の反復法は実行することができる。なお Gauss–Seidel 反復法に加速係数を加えた SOR 法を適用することで効率化する方法が [2, 5] で与えられている。

M は正定値対称行列として線形相補性方程式(10.2)で考える。最初は $x^{(0)} = 0$ とする。このとき $y^{(0)} = -q$ である。そして k ステップでの解 $x^{(k)}$ が求められたとして $x^{(k+1)},\ y^{(k+1)}$ を以下により構成する。まず $0 \leqq \ell \leqq n$ に対して

$$x_i^{(k+1,\ell)} = \begin{cases} x_i^{(k+1)} & (1 \leqq i \leqq \ell) \\ x_i^{(k)} & (\ell+1 \leqq i \leqq n) \end{cases}$$

とおく。明らかに $x^{(k+1,0)} = x^{(k)},\ x^{(k+1,n)} = x^{(k+1)}$ である。e_i を第 i 成分が 1 の単位ベクトルとして $\phi_\ell = e_\ell'(q - Mx^{(k+1,\ell-1)})$ とおき

$$r^{(k+1)} = \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \cdots & \phi_n \end{pmatrix}'$$

とする。そして

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= \max\left\{0, x^{(k)} + \mathrm{diag}\left(\frac{1}{m_{11}}, \dots, \frac{1}{m_{nn}}\right) r^{(k+1)}\right\} \\ y^{(k+1)} &= -r^{(k+1)} + \mathrm{diag}(m_{11}, \dots, m_{nn})(x^{(k+1)} - x^{(k)}) \end{aligned}$$

とおく。このとき $x^{(k)},\ y^{(k)}$ は線形相補性方程式(10.2)の解 $x,\ y$ に収束することが証明されている。

これを例題 5.1 を用いて行うと次のようになる。まず(8.8)で求めたように

$$M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

であり，これにより線形相補性方程式(10.3)が得られる。ただし M の行列式は 0 となり正定値ではない。また $\lambda \in \mathbb{R}_+^4$ から(8.7)により 2 次計画問題の解が

$$x(\lambda) = \begin{pmatrix} 2 + \frac{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}{2} \\ 1 + \frac{\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3}{2} \end{pmatrix} \tag{10.4}$$

で求めることができる。簡単のため両辺を 2 倍して

$$G\lambda - y = h, \quad G = 2M,\ y = 2s,\ h = 2q \tag{10.5}$$

として Hildreth の反復法で解くことにする。これを成分で書くと

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 - y_1 &= 2 \\ 3\lambda_1 + 5\lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4 - y_2 &= 4 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - y_3 &= -4 \qquad (10.6) \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_4 - y_4 &= -2 \qquad (10.7) \\ \lambda_1 y_1 = 0,\ \lambda_2 y_2 = 0,\ \lambda_3 y_3 &= 0,\ \lambda_4 y_4 = 0 \end{aligned}$$

となるが，(10.6),(10.7)により

$$\begin{aligned} \lambda_3(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + 4) &= 0 \\ \lambda_4(\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_4 + 2) &= 0 \end{aligned}$$

となり，$\lambda_3=0,\ \lambda_4=0$ が得られる。これを代入すると

$$
\begin{gathered}
2\lambda_1+3\lambda_2-y_1=2\\
3\lambda_1+5\lambda_2-y_2=4\\
\lambda_1 y_1=0,\ \lambda_2 y_2=0
\end{gathered}
$$

となるので

$$
G=\begin{pmatrix}2&3\\3&5\end{pmatrix},\quad h=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix},\quad \lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\end{pmatrix},\quad y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}
$$

として解けばよい。G は正定値である。まず $\lambda^{(0)}=0$ とする。このとき

$$
\begin{aligned}
r_1^{(1)}&=h_1-2\lambda_1^{(0)}-3\lambda_2^{(0)}=2\\
\lambda_1^{(1)}&=\max\left\{0,\lambda_1^{(0)}+\frac{1}{2}r_1^{(1)}\right\}=1\\
r_2^{(1)}&=h_2-3\lambda_1^{(1)}-5\lambda_2^{(0)}=1\\
\lambda_2^{(1)}&=\max\left\{0,\lambda_2^{(0)}+\frac{1}{5}r_2^{(1)}\right\}=\frac{1}{5}\\
y_1^{(1)}&=-r_1^{(1)}+2(\lambda_1^{(1)}-\lambda_1^{(0)})=0\\
y_2^{(1)}&=-r_2^{(1)}+5(\lambda_2^{(1)}-\lambda_2^{(0)})=0
\end{aligned}
$$

である。従って

$$
\lambda^{(1)}=\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{5}\end{pmatrix},\quad y^{(1)}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}
$$

が得られるが，これは線形相補性方程式の解ではない。次に

$$
\begin{aligned}
r_1^{(2)}&=h_1-2\lambda_1^{(1)}-3\lambda_2^{(1)}=-\frac{3}{5}\\
\lambda_1^{(2)}&=\max\left\{0,\lambda_1^{(1)}+\frac{1}{2}r_1^{(2)}\right\}=0\\
r_2^{(2)}&=h_2-3\lambda_1^{(2)}-5\lambda_2^{(1)}=3\\
\lambda_2^{(2)}&=\max\left\{0,\lambda_2^{(1)}+\frac{1}{5}r_2^{(2)}\right\}=\frac{4}{5}\\
y_1^{(2)}&=-r_1^{(2)}+2(\lambda_1^{(2)}-\lambda_1^{(1)})=-\frac{7}{5}\\
y_2^{(2)}&=-r_2^{(2)}+5(\lambda_2^{(2)}-\lambda_2^{(1)})=0
\end{aligned}
$$

である。従って

$$
\lambda^{(2)}=\begin{pmatrix}0\\\frac{4}{5}\end{pmatrix},\quad y^{(2)}=\begin{pmatrix}-\frac{7}{5}\\0\end{pmatrix}
$$

が得られるが，これも線形相補性方程式の解ではない。また次に

$$
\begin{aligned}
r_1^{(3)} &= h_1 - 2\lambda_1^{(2)} - 3\lambda_2^{(2)} = -\frac{2}{5}\\
\lambda_1^{(3)} &= \max\left\{0, \lambda_1^{(2)} + \frac{1}{2} r_1^{(3)}\right\} = 0\\
r_2^{(3)} &= h_2 - 3\lambda_1^{(3)} - 5\lambda_2^{(2)} = 0\\
\lambda_2^{(3)} &= \max\left\{0, \lambda_2^{(2)} + \frac{1}{5} r_2^{(3)}\right\} = \frac{4}{5}\\
y_1^{(3)} &= -r_1^{(3)} + 2(\lambda_1^{(3)} - \lambda_1^{(2)}) = \frac{2}{5}\\
y_2^{(3)} &= -r_2^{(3)} + 5(\lambda_2^{(3)} - \lambda_2^{(2)}) = 0
\end{aligned}
$$

である。従って

$$
\lambda^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}, \quad y^{(3)} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ 0 \end{pmatrix}
$$

が得られるが，これは線形相補性方程式の解である。

これより線形相補性方程式(10.5)の解は

$$
\lambda = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{5} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ 0 \\ \frac{24}{5} \\ \frac{18}{5} \end{pmatrix}
$$

である。この λ を用いると(10.4)により

$$
x(\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{12}{5} \\ \frac{9}{5} \end{pmatrix}
$$

が得られる。目的関数の最大値は目的関数に $x_1 = \frac{12}{5}$，$x_2 = \frac{9}{5}$ を代入すれば $z = \frac{21}{5}$ となるので，$x_1 = \frac{12}{5}$，$x_2 = \frac{9}{5}$ のとき最大値 $z = \frac{21}{5}$ となる。

11. Lemke の双対法

Lemke の双対法 ([3, 11]) は線形相補性方程式(10.2)の解を $x = 0,\ y = -q$ から解き始めて $x'BB^{-1}y = 0,\ B'x \geqq 0,\ B^{-1}y \geqq 0$ を満たすような正定値行列 B を構成することで求める方法である。B を基底行列という。この方法はその後拡張され現在ではさまざまな数理計画問題や線形相補性方程式の解法に用いられている。

ここでは制約条件の不等式を 1 つにまとめた 2 次計画問題 QP_2 を考える。そして Q は正定値であると仮定する。このとき線形相補性方程式(10.3)が得られるが，これは 50頁の 2 次計画問題 QP_1 で $A = O,\ b = 0$ の場合を考えれば分かるように，$\lambda \in \mathbb{R}_+^m$ という制約条件のもとで 2 次関数

$$
\varphi(\lambda) = q'\lambda - \frac{1}{2}\lambda' M \lambda \tag{11.1}
$$

を最大にするという 2 次計画問題の Kuhn–Tucker 条件と一致する。通常 $\lambda' BB^{-1}s = 0,\ B'\lambda \geqq 0,\ B^{-1}s \geqq 0$ となり，しかも $B'\lambda,\ B^{-1}s$ が線形相補性方程式(10.3)の解となるような基底行列 B を構成することは困難で

あるので，Lemke の方法では $\varphi(\lambda)$ が大きくなる方向に基底行列 B を更新して行くことで，最終的に線形相補性方程式の解が得られるようにする。

まず次の事項に注意しておく。$\lambda \in \mathbb{R}^m_+,\ \theta \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}^m_+$ とする。そして $\underset{\sim}{\lambda} = \lambda - \theta b$ とおいて最大値の検索に線形探査法を適用する。まず(7.3)を用いると

$$\varphi(\underset{\sim}{\lambda}) = \varphi(\lambda) + \theta b's - \frac{1}{2}\theta^2 b'p \tag{11.2}$$

と表すことができる。ここで $s = M\lambda - q,\ p = Mb$ である。$\underset{\sim}{\lambda} \in \mathbb{R}^m_+$ でなくてはならないので

$$\theta_c = \min\left\{\frac{\lambda_i}{b_i} : b_i > 0\right\} \quad (\text{最小値を与える } i \text{ を } c \text{ と書くことにする。})$$

とおくと $\theta \leqq \theta_c$ でなくてはならない。また $\varphi(\underset{\sim}{\lambda})$ は $\theta_u = \frac{b's}{b'p}$ のときに最大値を取るので，$\varphi(\underset{\sim}{\lambda})$ の $\underset{\sim}{\lambda} \in \mathbb{R}^m_+$ のもとでの最大値は $\theta = \min\{\theta_u, \theta_c\}$ のときに取ることになる。

Lemke の双対法は次の手順に基づいて行われる。線形相補性方程式(10.3)をまず $\lambda = 0,\ s = -q$ として解き始める。基底行列は $B = I$ である。そしてあるステップでの基底行列と解 $B,\ \lambda,\ s$ が構成されたとする。ここで B は正定値でさらにすべての成分が非負数となる正方行列である。まず B と $(B^{-1})'$ を列ベクトルで分割して

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_m \end{pmatrix} \tag{11.3}$$

$$(B^{-1})' = \begin{pmatrix} b^1 & b^2 & \cdots & b^m \end{pmatrix} \tag{11.4}$$

と表すことにする。ここで $b_i \in \mathbb{R}^m_+,\ b^i \in \mathbb{R}^m$ である。$B^{-1}B = I$ より $(b^i)'b_j = \delta_{ij}$ である。この基底行列 B に対して

$$F(B) = \{i : \lambda' b_i > 0\}$$
$$R(B) = \{i : \lambda' b_i = 0\}$$

とおいて $F(B)$ を B に関する自由列，$R(B)$ を B に関する制約列という。このとき次の 3 つの場合が起きることになる。

(i) すべての $i \in F(B)$ に対して $(b^i)'s = 0$ となり，またすべての $i \in R(B)$ に対して $(b^i)'s \geqq 0$ である。
(ii) すべての $i \in F(B)$ に対して $(b^i)'s = 0$ であるが，ある $i \in R(B)$ に対して $(b^i)'s < 0$ である。
(iii) ある $i \in F(B)$ に対して $(b^i)'s \neq 0$ である。

(i) の場合は $\lambda,\ s$ が線形相補性方程式(10.3)の解であり，(8.1)で与えられる $x(\lambda)$ が 2 次計画問題の解である。(ii) もしくは (iii) の場合は $\lambda,\ s$ は線形相補性方程式(10.3)の解を与えていない。それで (ii) の場合は $(b^i)'s < 0$ となる $i \in R(B)$ の中で最小であるものを，(iii) の場合は $(b^i)'s \neq 0$ となる $i \in F(B)$ の中で絶対値が最大であるものを選び，これを与える i を r と書くことにする。このとき基底行列 B の b_r を更新することで基底行列を更新する。以降では更新後の基底行列は $\underset{\sim}{B}$ のように下に波線を付けて表すことにする。これは $\lambda,\ s$ についても同様で更新後は下に波線を付けて表すことにする。

ここで上で行ったように $\underset{\sim}{\lambda} = \lambda - \theta b^r$ とおいて，$\underset{\sim}{\lambda} \in \mathbb{R}^m_+$ の範囲で $\varphi(\underset{\sim}{\lambda})$ を最大にする θ を求める。このとき $\theta = \theta_c$ であれば $\underset{\sim}{b}_r = e_c$ とする。ここで e_c は第 c 成分が 1 の単位ベクトルである。また $\theta = \theta_u$ であれば $\underset{\sim}{b}_r = Mb^r$ とする。そして b_r を $\underset{\sim}{b}_r$ に置き換えたものを $\underset{\sim}{B}$ とする。これに応じて $\lambda,\ s$ は

$$\underset{\sim}{\lambda} = \lambda - \theta b_r \tag{11.5}$$

$$\underset{\sim}{s} = s - \theta M b^r \tag{11.6}$$

と更新される。$\utilde{B}$ の逆行列 $\utilde{B}^{-1}$ は直接計算してもよいが

$$
\begin{aligned}
\utilde{b}^r &= \frac{1}{\utilde{b}_r' b^r} b^r \\
\utilde{b}^i &= b^i - (\utilde{b}_r' b^i)\utilde{b}^r \quad (i \neq r)
\end{aligned}
$$

により得られる。また

$$
R(\utilde{B}) = \begin{cases} R(B) \setminus \{r\} & (\text{(ii) で } \theta = \theta_u \text{ の場合}) \\ R(B) \cup \{r\} & (\text{(iii) で } \theta = \theta_c \text{ の場合}) \\ R(B) & (\text{上記以外の場合}) \end{cases} \tag{11.7}
$$

と更新される。また $F(\utilde{B})$ もこれに応じて更新される。

これを例題 5.1 を用いて行うと次のようになる。まず(8.8)で求めたように

$$
M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}
$$

である。

最初は $B = I,\ \lambda = 0$ とする。このとき $R(I) = \{1,2,3,4\},\ F(I) = \emptyset$ である。また $s = -q = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}'$ であるので，これは (ii) の場合に該当する。q の成分が負数で最小であるものは -2 であるから $r = 2$ となり $b_2 = e_2$ を更新することになる。$b^2 = e_2$ であり $\utilde{\lambda} = \lambda - \theta b^2$ とおいて(11.2)を計算すると

$$
\varphi(\utilde{\lambda}) = -2\theta - \frac{5}{4}\theta^2
$$

となる。まず $\utilde{\lambda} \geqq 0$ でなくてはならないので $\theta_c = 0$ である。また上の2次方程式の最大値は $\theta_u = -\frac{4}{5}$ であるから $\theta \leqq \theta_c$ での最大値は $\theta = \theta_u$ のときに取ることになる。従って

$$
\utilde{b}_2 = Mb^2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}'
$$

となり，これを用いると

$$
\utilde{B} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \utilde{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{5} & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\utilde{\lambda} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{5} & 0 & 0 \end{pmatrix}', \quad \utilde{s} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & \frac{12}{5} & \frac{9}{5} \end{pmatrix}'
$$

が得られる。また

$$
R(\utilde{B}) = R(I) \setminus \{2\} = \{1,3,4\}, \quad F(\utilde{B}) = \{2\}
$$

である。

$\utilde{B},\ \utilde{\lambda},\ \utilde{s}$ を $B,\ \lambda,\ s$ と書き直して次のステップに移行する。ここで

$$
B^{-1}s = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & \frac{12}{5} & \frac{9}{5} \end{pmatrix}'
$$

であるので，これは (i) の場合である。この λ を用いると(10.4)により

$$x(\lambda)=\begin{pmatrix}\frac{12}{5}\\ \frac{9}{5}\end{pmatrix}$$

が得られる。目的関数の最大値は目的関数に $x_1=\frac{12}{5}$，$x_2=\frac{9}{5}$ を代入すれば $z=\frac{21}{5}$ となるので，$x_1=\frac{12}{5}$，$x_2=\frac{9}{5}$ のとき最大値 $z=\frac{21}{5}$ となる。

12. 有界変数問題

数理計画問題で制約条件の中に変数の上界条件が含まれているものを有界変数問題という。線形計画問題のときは上界条件をシンプレックス表に持ち込まないで解く方法が与えられているが，２次計画問題の場合も van de Panne–Whinston の双対法を用いることで，上界条件をシンプレックス表に持ち込まないで解を得ることができる。ここで２次計画問題 QP_1 に上界条件を持ち込んだ次の２次計画問題を考える。

２次計画問題:QP_6
制約条件
$Ax=b$
$x \leqq \bar{b}$
$x \in \mathbb{R}^n_+$
目的関数
$z=c'x-\dfrac{1}{2}x'Qx$ を最大にする。

上界条件にスラック変数 $u \in \mathbb{R}^n_+$ を入れると $x+u=\bar{b}$ となり，制約条件は

$$\begin{pmatrix}A & O\\ I & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ u\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b\\ \bar{b}\end{pmatrix}$$

と書ける。従って 50頁の Kuhn–Tucker 条件の (c) は $\lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{m+n}$，$\mu=\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2n}_+$ としたときに

$$\begin{pmatrix}Q & O\\ O & O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ u\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}A' & I\\ O & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c\\ 0\end{pmatrix}$$

と表すことができる。つまり

$$\begin{aligned}&Qx+A'\lambda_1+\lambda_2-\mu_1=c\\ &\lambda_2-\mu_2=0\end{aligned}$$

が成り立つ。これより Kuhn–Tucker 条件は μ_1 を μ，μ_2 を $\bar{\mu}$，λ_1 を λ，u を $\bar{x}$ と置き換えると次のように表すことができる。

(a) $x\in\mathbb{R}^n_+,\ \bar{x}\in\mathbb{R}^n_+,\ \mu\in\mathbb{R}^n_+,\ \bar{\mu}\in\mathbb{R}^n_+,\ \lambda\in\mathbb{R}^m$
(b) $Ax=b,\ x+\bar{x}=\bar{b}$
(c) $Qx+A'\lambda-\mu+\bar{\mu}=c$

(d) $x'\mu = 0,\ \bar{x}'\bar{\mu} = 0$

また目的関数は相補性条件が成り立つところでは

$$z = \frac{1}{2}c'x + \frac{1}{2}b'\lambda + \frac{1}{2}\bar{b}'\bar{\mu} \tag{12.1}$$

となる。ここで (b) の最初の式には人為変数 v を入れ，$\lambda = \lambda^+ - \lambda^-$ $(\lambda^+ \geqq 0,\ \lambda^- \geqq 0)$ と分解して，71頁のシンプレックス表を書くと次のようになる。

	x	$\bar{\mu}$	λ^+	λ^-	b
v	A	O	O	O	b
$\bar{x}$	I	O	O	O	$\bar{b}$
μ	$-Q$	$-I$	$-A'$	A'	$-c$
z	$-\frac{1}{2}c'$	$-\frac{1}{2}\bar{b}'$	$-\frac{1}{2}b'$	$\frac{1}{2}b'$	0

$(x, \bar{x}, v)$ を主変数，$(\mu, \bar{\mu}, \lambda)$ を双対変数ということは van de Panne–Whinston の双対法のときと同じである。

このシンプレックス表を用いて van de Panne–Whinston の双対法を使えば有界変数問題は解くことができる。ただ $x,\ \bar{x},\ \mu,\ \bar{\mu}$ については

$$x + \bar{x} = \bar{b} \tag{12.2}$$

$$\mu + \bar{\mu} = -\frac{1}{2}\bar{b} \tag{12.3}$$

という関係が成り立つ。ただしここで $x,\ \bar{x}$ はシンプレックス表の行ベクトルで，$\mu,\ \bar{\mu}$ はシンプレックス表の列ベクトルで考えている。このためシンプレックス表から $\bar{x},\ \bar{\mu}$ を取り除いても解を導くことができる。具体的には $x,\ \bar{x}$ については次の事柄が成り立つ。

(a) x と $\bar{x}$ は共に非基底変数になることはない。
(b) x が基底変数で $x = \bar{b}$ のときは $\bar{x}$ は非基底変数である。同様に $\bar{x}$ が基底変数で $\bar{x} = \bar{b}$ のときは x は非基底変数である。
(c) x が基底変数で $x < \bar{b}$ のときは $\bar{x}$ も基底変数である。

また相補性条件を考えれば $\mu,\ \bar{\mu}$ についても同じで次の事柄が成り立つ。

(a) μ と $\bar{\mu}$ は共に基底変数になることはない。
(b) μ が非基底変数で $\mu = -\frac{1}{2}\bar{b}$ のときは $\bar{\mu}$ は基底変数である。同様に $\bar{\mu}$ が非基底変数で $\bar{\mu} = -\frac{1}{2}\bar{b}$ のときは μ は基底変数である。
(c) μ が非基底変数で $\mu < -\frac{1}{2}\bar{b}$ のときは $\bar{\mu}$ も非基底変数である。

これを用いることで有界変数問題は上界条件を持ち込まなくとも解くことができる。これを次の有界変数問題で行う。

例題 12.1　次の 2 次計画問題を解け。

制約条件

$x_1 + x_2 \geqq 4$

$x_1 + 2x_2 \geqq 6$

$x_1 \geqq 0,\ 0 \leqq x_2 \leqq \dfrac{3}{2}$

目的関数

$z = 4x_1 + 2x_2 - x_1^2 - x_2^2$ を最大にする。

まず 95頁の条件 (b)–(d) を書くと次のようになる。ただし 74頁で行ったように人為変数は使わないでサープラス変数のみを用いている。

$$-x_1 - x_2 + s_1 = -4 \tag{12.4}$$
$$-x_1 - 2x_2 + s_2 = -6 \tag{12.5}$$
$$x_2 + \bar{x}_2 = \frac{3}{2} \tag{12.6}$$
$$2x_1 + \lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1 - \bar{\mu}_1 = -4 \tag{12.7}$$
$$2x_2 + \lambda_1 + 2\lambda_2 + \mu_2 - \bar{\mu}_2 = -2 \tag{12.8}$$
$$x_1\mu_1 = 0,\ x_2\mu_2 = 0,\ \bar{x}_2\bar{\mu}_2 = 0 \tag{12.9}$$

また相補性条件が成り立つところでは目的関数は

$$z = 2x_1 + x_2 - 2\lambda_1 - 3\lambda_2 + \frac{3}{4}\bar{\mu}_2 \tag{12.10}$$

と表すことができる。

これを $\bar{x},\ \bar{\mu}$ を除いてシンプレックス表にすると次のようになる。これは上界条件を仮定しないで作ったシンプレックス表と同じである。

	x_1	x_2	λ_1	λ_2	b
s_1	-1	-1	0	0	-4
s_2	-1	-2	0	0	-6
μ_1	-2	0	1	1	-4
μ_2	0	-2	1	2	-2
z	-2	-1	2	3	0

まず μ_1 を基底変数から追い出す変数の候補とする。μ_1 に対する主変数 x_1 が基底変数に入る変数となるので，$b \div \mu_1$ を計算すると，x_1 には上界条件がないので，実際に μ_1 と x_1 で基底交換が行われる。

	μ_1	x_2	λ_1	λ_2	b
s_1	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-2
s_2	$-\frac{1}{2}$	-2	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-4
x_1	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	2
μ_2	0	-2	1	2	-2
z	-1	-1	1	2	4

次に μ_2 を基底変数から追い出す変数の候補とする。μ_2 に対する主変数 x_2 が基底変数に入る変数となる。ここで $b \div \mu_2$ を計算すると，正で最小であるのは 1 で，これは x_2 の上界 $\frac{3}{2}$ 以下であるので，実際に μ_2 と x_2 で基底交換が行われる。

	μ_1	μ_2	λ_1	λ_2	b
s_1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{3}{2}$	-1
s_2	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$	-2
x_1	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	2
x_2	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-1	1
z	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	5

次は s_2 が基底変数から追い出す変数の候補となり，s_2 に対する双対変数 λ_2 が基底変数に入る変数となる。このシンプレックス表で $b \div \lambda_2$ を計算すると，正で最小になるのは s_2 のところであるので，s_2 と λ_2 で基底交換が行われるように思われる。しかし先に述べた事柄 (c) により $x_2 = 1 < \frac{3}{2}$ であるので，$\bar{x}_2$ も基底変数に入っている。従って計算にあたっては $\bar{x}_2$ も考慮しなくてはならない。x_2 と $\bar{x}_2$ が両方とも基底変数に入っているので(12.2)を用いて x_2 を $\bar{x}_2$ に変えると次のようになる。

	μ_1	μ_2	λ_1	λ_2	b
s_1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{3}{2}$	-1
s_2	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$	-2
x_1	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	2
$\bar{x}_2$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$
z	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	5

これより $b \div \lambda_2$ が正で最小になるのは $\bar{x}_2$ のところである。つまり $\bar{x}_2$ と λ_2 で基底交換を行う。

	μ_1	μ_2	λ_1	$\bar{x}_2$	b
s_1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{4}$
s_2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{4}$
x_1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{4}$
λ_2	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
z	-1	-1	0	-1	$\frac{9}{2}$

これは非標準型であり，元から基底変数であった s_2 が基底変数から追い出される変数の候補となる。主変数と双対変数が共に非基底変数になっている変数はこのシンプレックス表にはないが，これも $\mu_2 = -1 < -\frac{3}{4}$ であるので，先に述べた事柄 (c) により $\bar{\mu}_2$ も非基底変数に入っている。それで(12.3)を用いて μ_2 を $\bar{\mu}_2$ に変えると次のようになる。

	μ_1	$\bar{\mu}_2$	λ_1	$\bar{x}_2$	b
s_1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{4}$
s_2	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{4}$
x_1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{4}$
λ_2	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
z	-1	$\frac{1}{4}$	0	-1	$\frac{9}{2}$

これより $\bar{\mu}_2$ が基底変数に入る変数となり，$b \div \bar{\mu}_2$ を計算すると s_2 と $\bar{\mu}_2$ で基底交換が行われる。

	μ_1	s_2	λ_1	$\bar{x}_2$	b
s_1	0	-1	-1	-1	$\frac{1}{2}$
$\bar{\mu}_2$	2	-4	-3	-10	3
x_1	0	-1	-1	-2	3
λ_2	1	-2	-1	-4	2
z	$-\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{15}{4}$

従って $x_1 = 3,\ \bar{x}_2 = 0$ のとき最大値 $z = \frac{15}{4}$ をとるとなる。ここで $x_2 + \bar{x}_2 = \frac{3}{2}$ を使うと，$x_1 = 3,\ x_2 = \frac{3}{2}$ のとき最大値 $z = \frac{15}{4}$ をとるとなる。

参考文献

[1] E. M. L. Beale, On quadratic programming, Naval Res. Logist. Quart., vol 6(1959), 227-243.

[2] C. W. Cryer, The solution of nonlinear programming problem using systematic overrelaxation, SIAM J. Control and Optimization, vol 9 no 3(1971), 385–392.

[3] R. W. Cottle and G. B. Dantzig, Complementary pivot theory of mathematical programming, Linear Algebra and Applications, vol 1(1968), 103–125.

[4] R. W. Cottle, J. Pang and R. E. Stone, The Linear Complementary Problem, Applied Mathematics 60(2009), SIAM.

[5] U. Eckhardt, Quadratic Programming by Successive Overrelaxation, Berichte der KFA, 1064(1974).

[6] M. Frank and Ph. Wolfe, An Algorithm for Quadratic Programming, Naval Res. Logist. Quant., vol 3(1956), 95–110.

[7] K. P. Ghadle and T. S. Pawar, New approach for Wolfe's modified simplex method to solve quadratic programming problems. Int. J. Res. in Eng. and Tech., vol 4 no 1(2015), 371–376.

[8] C. Hildreth, A quadratic programming procedure, Naval Res. Logist. Quant., vol 4(1957), 79–85.

[9] H. S. Houthakker, The Capacity Method of Quadratic Programming, Econometrica, vol 28 no 1(1960), 62–87.

[10] P. Hungerländer, Algorithms for Convex Quadratic Programming, arXiv: 1409.5222v1, 2014.

[11] C. E. Lemke, A Method of Solution for Quadratic Programming, Management Sci., vol 8(1962), 442–453.

[12] D. G. Luenberger and Y. Ye, Linear and Nonlinear Programming, Third Edition(2008), Springer.

[13] T. Sato, G. Okita and M. Ito, 凸二次計画問題に対する容量法の高速化, 計量自動制御学会論文集, vol 32 no 4(1996), 587–595.

[14] T. Terlaky, A New Algorithm for Quadratic Programming, European J. Oper. Res., vol 32(1987), 294–301.

[15] K. Takeuchi and R. Manabe, 二次計画 Quadratic Programming について, 経営科学, vol 10 no 3(1964), 117–140.

[16] V. Moraru, An Algorithm for Solving Quadratic Programming Problems, Comp. Sci. J. of Moldova, vol 5 no 2(1997), 223–235.

[17] C. van de Panne, Methods for Linear and Quadratic Programming, North–Holland, Amsterdam(1975).

[18] C. van de Panne and A. Whinston, The Simplex and the Dual Method for Quadratic Programming, Oper. Res. Quant., vol 15(1964), 355-388.

[19] Ph. Wolfe, The simplex method for quadratic programming, Econometrica, vol 27 no 3(1959), 382–398.